Пособие для поступающих в 8—10 классы физико–математических школ

Л.С.Михлин

2020

Содержание

1 Введение **3**

2 7 класс **4**
2.1 Числовые выражения . . . 4
2.2 Степенные функции . . . 8
2.3 Преобразование буквенных выражений . . . 10
2.4 Проценты . . . 16
2.5 Уравнения и неравенства . . . 20
2.6 Прямые на координатной плоскости . . . 25
2.7 Стандартные задачи . . . 32
2.8 Нестандартные задачи . . . 38
2.9 Геометрия . . . 44

3 8 класс **51**
3.1 Числовые выражения . . . 51
3.2 Преобразование буквенных выражений . . . 55
3.3 Уравнения . . . 58
3.4 Неравенства . . . 63
3.5 Исследование функций и уравнений . . . 66
3.6 Графики . . . 71
3.7 Стандартные задачи. . . . 77
3.8 Нестандартные задачи . . . 81
3.9 Геометрия . . . 86

4 9 класс **98**
4.1 Числовые выражения . . . 98
4.2 Преобразование буквенных выражений . . . 100
4.3 Уравнения . . . 102
4.4 Неравенства . . . 105
4.5 Исследование функций и уравнений . . . 107
4.6 Графики . . . 110
4.7 Прогрессии . . . 117
4.8 Тригонометрия . . . 120
4.9 Стандартные задачи . . . 123
4.10 Нестандартные задачи . . . 126
4.11 Геометрия . . . 128

1 Введение

В этом пособии будут рассмотрены основные темы, методы решения и примеры задач, которые встречаются во вступительных олимпиадах в 8, 9 и 10 классы физ-мат школ Санкт-Петербурга. Пособие составлено на основании многолетнего опыта автора по подготовке учащихся к поступлению. Вступительные работы в старшие классы обычно содержат чётко структурированный набор задач на заранее известные темы, что делает подготовку к поступлению значительно проще чем, например, подготовка к поступлению в 5 классы тех же школ.

Автор не ставит себе целью обучение обыкновенной школьной математике, здесь будут рассмотрены именно специальные виды задач, все стандартные действия считаются известными. Также этим пособием сложно заменить занятия на подготовительных курсах или с репетитором, оно предназначено для предоставления практики тем, кто каким-либо образом изучает затрагиваемые темы, хотя сильные ученики и могут делать это самостоятельно при помощи учебников по алгебре и геометрии за 7—9 класс. Цель данного пособия — описать наиболее полезные приёмы для решения задач вступительных испытаний и продемонстрировать набор релевантных этой цели задач. В конце каждого раздела приведён набор задач на соответствующую тему. Есть задачи, относящиеся к нескольким темам, они будут приведены в одной из них. Суммарно во всех главах будут содержаться все задачи из вступительных олимпиад в ФМЛ №239 начиная с 1997 года и ещё некоторое количество задач из вступительных олимпиад в другие сильные физматшколы. Главы можно изучать в любом порядке.

Список рекомендуемых учебников для прохождения программы по математике за 7,8 и 9 классы будет приведён в конце пособия.

2 7 класс

Стандартная вступительная работа в ФМЛ №239 состоит из 10 задач: по одной из первых восьми разделов и две из последнего, геометрического. На выполнение работы отводится 120 минут.

2.1 Числовые выражения

Обыкновенная или десятичная? Как вы знаете, дроби бывают двух видов: обыкновенные и десятичные. Возникает вопрос: какие удобнее использовать в вычислительных примерах? Ответ такой: почти всегда удобнее использовать дроби обыкновенные. Это связано с тем, что абсолютно любую десятичную дробь перевести в обыкновенную всегда можно, тогда как не любая обыкновенная дробь представима в виде **конечной** десятичной; кроме того даже при делении двух десятичных дробей друг на друга результат далеко не всегда может быть представлен конечной дробью. Периодические десятичные дроби во вступительных олимпиадах практически не встречаются, но при их появлении в условии задания необходимо тут же представить их в виде обыкновенной дроби.

Например, представим в виде обыкновенной дроби число $3,4(67)$. Для этого обозначим это число буквой $x = 3,4(67)$. Период дроби состоит из 2 цифр, поэтому домножим её на $10^2 = 100$. Получим $100x = 346,7676767\ldots = 346,7(67)$. Теперь, когда мы вычтем из полученной дроби исходную, период сократится: $100x - x = 346,7(67) - 3,4(67) = 343,3 = 99x$. Таким образом, $x = 343,3 : 99 = \dfrac{3433}{990}$.

Если в арифметическом действии участвуют только десятичные дроби, то их, естественно, переводить в обыкновенные не требуется (кроме случаев деления при отсутствии конечного ответа). Вот примеры, когда перевод не требуется:

1. $3,59 + 7,41 = 11$, 3. $14,74 - 9,55 = 5,19$,
2. $9,8 : 0,07 = 140$, 4. $4,8 \cdot 6,5 = 31,2$.

А в следующих примерах без перевода не обойтись:

1. $2,6 + \dfrac{1}{3} = 2\dfrac{6}{10} + \dfrac{1}{3} = 2\dfrac{9}{15} + \dfrac{5}{15} = 2\dfrac{14}{15}$, 3. $\dfrac{3}{7} \cdot 10,5 = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{105}{10} = \dfrac{3 \cdot 105}{7 \cdot 10} = \dfrac{9}{2}$,
2. $11,1 : 2,1 = \dfrac{111}{10} : \dfrac{21}{10} = \dfrac{111}{21} = \dfrac{37}{7}$, 4. $4,2 : \dfrac{4}{3} = \dfrac{42}{10} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{63}{20}$.

Смешанные дроби. При появлении в условии действий со смешанными дробями возникает вопрос: надо ли переводить их в неправильные? При выполнении умножения или деления ответ на этот вопрос очевиден, без перевода получить правильный ответ просто невозможно. При сложении и вычитании же зачастую перевод в неправильную дробь может только усложнить ситуацию: $457\dfrac{143}{239} + 35\dfrac{98}{239} = 493\dfrac{2}{239}$. Без перевода действие выполняется нетрудно, перевод же занял бы довольно много драгоценного времени. Распространённой ошибкой при выполнении действий со смешанными дробями является следующая: $2\dfrac{3}{5} - 5\dfrac{2}{5} = -3\dfrac{1}{5}$. Так считать ни в коем случае нельзя! Для смешанных дробей (как, кстати, и для десятичных) действует следующее правило: надо из большего по модулю числа вычесть меньшее и поставить перед результатом знак минус: $2\dfrac{3}{5} - 5\dfrac{2}{5} = -\left(5\dfrac{2}{5} - 2\dfrac{3}{5}\right) = -\left(4\dfrac{7}{5} - 2\dfrac{3}{5}\right) = -2\dfrac{4}{5}$.

Также полезен при сложении и вычитании смешанных дробей способ «дополнения до целого». Он работает так: $3\dfrac{34}{35} + 2\dfrac{29}{35} = 4 - \dfrac{1}{35} + 3 - \dfrac{6}{35} = 7 - \dfrac{7}{35} = 6\dfrac{4}{5}$.

Распределительный закон. Иногда для рационального вычисления бывает полезно применить **распределительный закон умножения (или деления)**:

$$a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c), \quad a : b \pm c : b = (a \pm c) : b.$$

Обратите внимание, что при делении одинаковым должен быть **делитель**, а не делимое. Примеры использования:

$$35 \cdot 166 - 26 \cdot 35 = 35 \cdot (166 - 26) = 35 \cdot 140 = 4900,\ 420\frac{3}{5} : 7 = (420 + \frac{3}{5}) : 7 = 60 + \frac{3}{35} = 60\frac{3}{35}.$$

Правильное использование распределительных законов может значительно сократить время выполнения арифметических действий.

Перенос запятой. Для применения распределительного закона умножения бывает удобно изменить множители, оставив неизменным произведение, при помощи переноса запятой влево и вправо на одинаковое количество знаков: $3,76\cdot19+8,1\cdot37,6 = 3,76\cdot19+81\cdot3,76 = 37,6\cdot(19+81) = 3760$.

Взять за x. Существуют примеры, в которых удобно уже известное число обозначить буквой x. Это имеет смысл, когда все числа в примере удобно выражаются через какое-то одно. Например: $372\cdot378-374\cdot376$. Обозначим $x = 375$. Тогда имеем $(x-3)(x+3)-(x-1)(x+1) = (x^2-9)-(x^2-1) = x^2 - 9 - x^2 + 1 = -8$. Этот метод тесно связан с преобразованиями буквенных выражений, более сложные задачи будут приведены в соответствующем разделе.

Задачи. В этом разделе, как и во всех последующих аналогичных, собраны задачи для самостоятельно решения, встречавшиеся во вступительных экзаменах. Все примеры надежнее всего решать, выполняя действия по очереди, но при этом если для удобства вычисления естественный порядок действий можно поменять, то следует это сделать. Задание для всех примеров одинаковое: вычислить (если не указано что-либо другое).

1. $\left(\frac{2}{3} - 1,3 + \frac{3}{4}\right) : 1,4 + \frac{1}{6}$, 2. $4,4 - 0,28 : \left(\frac{1}{9} - \frac{7}{15} + 0,375\right)$,

3. $\left(1\frac{11}{24} + \frac{13}{36}\right) \cdot 1,44 - \frac{8}{15} \cdot 0,5625$, 4. $\left(\frac{31}{66} + 1\frac{10}{33}\right) \cdot 1,32 - \frac{8}{13} \cdot 0,1625$,

5. Найти число, 4,8% которого равно $\dfrac{15\frac{13}{29} \cdot 3,625 + 28 : \frac{7}{15}}{\frac{20}{49} \cdot 9,8 + 0,625 : 0,75}$,

6. Найти число, 2,4% которого равно $\dfrac{12 \cdot (3,4 - 1,275) \cdot \frac{16}{17}}{\frac{5}{18} \cdot \left(1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17}\right) : \frac{1}{2}}$,

7. $\left(-5,17 : 1\frac{3}{4} + 1,67 \cdot \frac{4}{7}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right)$, 8. $\left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5}\right) : 0,35$,

9. $\left(3,14 \cdot \frac{15}{4} - 2,72 : \left(-6\frac{2}{5}\right)\right) : \left(23,9 - \frac{351}{30}\right)$,

10. $\left(27,2 : 5\frac{3}{5} - 0,314 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right)\right) : \left(\frac{942}{200} + 2,39\right)$, 11. $\left(1\frac{3}{4} : 1,125 - 1,75 : \frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{5}{7}$,

12. $19\frac{1}{3} : 4,75 - \left(5\frac{1}{3} - 3,5 \cdot \left(-\frac{4}{19}\right)\right)$, 13. $17,5 \cdot \frac{4}{17} - \left(6\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} : (-4,25)\right)$,

14. Найдите число, 17% которого равно $\left(1\frac{13}{14}-3\frac{4}{7}:1,25\right)\cdot\left(2015\frac{3}{7}-2016\frac{46}{91}\right)-(-0,7)^2$

15. Найдите число, 23% которого равно $\left(1\frac{5}{14}-3\frac{3}{7}:1,6\right)\cdot\left(2015\frac{5}{7}-2016\frac{27}{77}\right)-(-0,2)^2$

16. $\dfrac{3\cdot\left(\frac{7}{30}-0,125:1\frac{1}{8}\right)}{\left(5:1,8-2\frac{1}{3}:1,5\right):2\frac{2}{3}}$ 17. $\dfrac{5\cdot\left(\frac{26}{35}-3,75:8\frac{3}{4}\right)}{\left(13:1\frac{2}{3}-0,3:\frac{1}{18}\right)\cdot3\frac{4}{7}}$

18. $\dfrac{0,725+0,6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0,128\cdot6\frac{1}{4}-0,0345:\frac{3}{25}}\cdot0,25,$

19.Найдите наибольшее из чисел $A=3\frac{23}{38}+2\frac{35}{38}:\left(24,175-28\frac{4}{5}\right)$,

$P=856\cdot858-859\cdot855,\ K=2\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243},$

20. Найдите наибольшее из чисел $B=5\frac{23}{34}+3\frac{27}{34}:\left(23,225-28\frac{3}{5}\right)$,

$Q=768\cdot764-769\cdot763,\ M=4\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{81}+\frac{2}{243},$

21. $\dfrac{1,7\cdot9,6+3,5\cdot1,7-1,7\cdot3,1}{12\frac{3}{4}:\left(1\frac{8}{15}+0,25-3\frac{1}{30}-1\frac{3}{4}\right)}$, 22. $\dfrac{6,5\cdot1,5-7,6\cdot6,5-13,9\cdot6,5}{\left(3\frac{4}{5}+1\frac{5}{12}-0,8-3\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}}$,

23. $\left(0,315\cdot0,725-0,75:\frac{3}{20}\cdot0,01+0,315\cdot0,275\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{20}\right)$,

24. $(1,48-(46:27-(0,52-16:54)))^2$, 25. $\left(20\frac{4}{5}+1\frac{5}{12}-0,8-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}$,

26. $\left(1\frac{1}{4}-14,05\right):0,04+13,8:\frac{1}{13}$, 27. $\dfrac{0,03+0,07:\left(1\frac{7}{24}+\frac{7}{30}-2\frac{9}{40}\right)+\frac{7}{36}\cdot\frac{18}{35}}{-0,1^2}$,

28. $2379\cdot23782378-2378\cdot23792379$,

29. $\dfrac{(21557\cdot21577+100)(21547\cdot21587+400)}{21567^4}$, 30. $\dfrac{(32002\cdot32022+100)(31992\cdot32032+400)}{32012^4}$,

31. $\dfrac{(41802\cdot41822+100)(41792\cdot41832+400)}{41812^4}$, 32. $\dfrac{(51907\cdot51927+100)(51897\cdot51937+400)}{51917^4}$,

33. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0,16}:\dfrac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0,5\left(1\frac{1}{20}+4,1\right)}$, 34. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0,05,$

35. $\dfrac{278\frac{1}{6}+529\frac{1}{21}+129\frac{5}{7}+54\frac{3}{14}}{\left(1\frac{3}{8}-4,2638+7\frac{3}{7}-2,7362+1\frac{11}{56}\right)\cdot(2,39\cdot 73-236+23,9\cdot 2,7)}$,

36. $\dfrac{119\frac{1}{42}+289\frac{23}{42}+108\frac{1}{6}+144\frac{3}{7}}{\left(3\frac{2}{9}-4,4561+5\frac{3}{7}-5,5439+3\frac{22}{63}\right)\cdot(3,66\cdot 49-363+36,6\cdot 5,1)}$,

37. $\dfrac{\left(-1\frac{4}{5}-6\frac{1}{3}+8,75\right):1\frac{2}{3}-\frac{-2,08}{16}}{-1\frac{7}{25}:1,92+\frac{7}{22}\cdot\left(-3\frac{2}{3}\right)}$, 38. $\dfrac{0,27\cdot\left(4\frac{2}{5}-0,9\right)-\dfrac{4.2}{4\frac{4}{9}}}{\frac{6,2}{0,31}-\frac{5}{6}\cdot 0,9}$,

39. $\dfrac{180\cdot 3,91-168+859\cdot 1,8-768}{239\frac{5}{6}-237\frac{2}{3}}$, 40. $\dfrac{1,7\cdot 229-1155+7,91\cdot 170+937}{366\frac{5}{6}-364\frac{29}{42}}$,

41. $\left(3\frac{7}{12}+4\frac{7}{12}:\left(2\frac{1}{3}-5\frac{1}{12}\right)\right):\left(3,25:5\frac{7}{22}-8\frac{5}{18}\right)$,

42. Найдите положительное число, если его квадрат равен $1566\cdot 1568+1$,

43. Сравните 2 и $29\frac{13}{17}\cdot 30\frac{13}{17}-28\frac{13}{17}\cdot 31\frac{13}{17}$.

44. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$, 45. $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0,175:0,35}{1,75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\dfrac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}$,

46. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0,04}\cdot\dfrac{3}{11}$, 47. Сравните $\dfrac{11}{14}$ и $\dfrac{55}{71}$.

48. Выясните, равно ли одно из чисел сумме двух других
$A=8,67:0,017-239\cdot 2\frac{8}{9}$, $B=15\text{НОД}(70,175)-\text{НОК}(70,175)$, $C=(-2,(3))^2$.

49. Выясните, равно ли одно из чисел сумме двух других
$A=7,28:0,013-239\cdot 2\frac{5}{9}$, $B=25\text{НОД}(84,36)-\text{НОК}(84,36)$, $C=(-1,(6))^2$.

2.2 Степенные функции

Степенные функции, которые могут встретиться на вступительных экзаменах в 8 класс — это выражения вида a^n, где n — натуральное число. При преобразовании выражений необходимо пользоваться следующими свойствами:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ при $n > m$,
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^{m-n}}$ при $m > n$,
4. $(ab)^n = a^n b^n$,
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$,
6. $(a^n)^m = a^{mn}$.

Эти правила работают как для буквенных выражений, так и для числовых.

Составные числа. Если в условии соответствующего задания встречается составное число, то его необходимо представить в виде произведения степеней простых. Пример: $540^3 = (2^2 \cdot 3^3 \cdot 5)^3 = 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^3$.

Отрицательные выражения. При возведении в степень отрицательных выражений возникает вопрос, какого знака будет получившийся результат. Ответ простой: если степень была нечётной, то знак «минус» сохраняется, а если она была чётной, то знак «минус» просто пропадет. Пример: $(-2)^5 = -32$, $(-3)^2 = 9$. При этом следует различать ситуации, когда минус стоит в скобках и за их пределами. Во втором случае он никуда не исчезает (так как у возведения в степень приоритет выше, чем у выставления «минуса», то есть оно делается раньше): $(-5)^2 = 25$, но $-5^2 = -25$. При этом степень может быть не числом, а выражением, чётность которого мы можем определить, например $(-a)^{2k-3} = -a^{2k-3}$ для любых чисел k, так как число $2k-3$ всегда нечётно.

Распределительный закон. К степеням можно применять уже встречавшийся нам распределительный закон умножения. Происходит это следующим образом:
1. $2^{34} - 2^{31} = 2^3 \cdot 2^{31} - 2^{31} = 2^{31} \cdot (2^3 - 1) = 2^{31} \cdot 7$,
2. $a^{2n+1} + 3a^{n+2} = a^{n+2} \cdot a^{n-1} + 3a^{n+2} = a^{n+2} \cdot (a^{n-1} + 3)$.

Задачи. Если не указано иное, задание одно: упростить выражение.
1. $\dfrac{(-1)^{2n+1} \cdot (-a)^{3n+4} \cdot (3an)^2}{(-a)^{3n-1}(2a^2n)^3}$, 2. $\dfrac{(-1)^{4k-3} \cdot (-b)^{5k+2} \cdot (5bk^2)^2}{(-b)^{5k-3}(4bk)^3}$,
3. При каком наименьшем натуральном n число 45^nделится нацело на 75^{10}?
4. При каком наименьшем натуральном n число 75^nделится нацело на 45^{10}?
5. $\dfrac{3^{32} - 3 \cdot 9^{14}}{26 \cdot 27^{10}}$, 6. $\dfrac{2^{50} - 2 \cdot 4^{22}}{31 \cdot 8^{15}}$, 7. $\dfrac{4^{2n+3} \cdot 2^{2n-1}}{(-8)^{2n}}$, 8. $\dfrac{9^{2n+3} \cdot 3^{2n-2}}{(-27)^{2n}}$,
9. $\dfrac{14^5}{2^6 \cdot 7^4}$, 10. $\dfrac{6^6}{2^7 \cdot 3^5}$, 11. $\dfrac{(6^4)^2}{4^4 \cdot 9^5}$, 12. $\dfrac{(14^3)^3}{7^8 \cdot 8^3}$,
13. $\left(\dfrac{3x^2y^5}{5z^6}\right)^5 \left(\dfrac{25z^5}{9x^2y^6}\right)^3$, 14. $\left(\dfrac{4xy^4}{5z^5}\right)^5 \left(\dfrac{25z^4}{16xy^5}\right)^3$, 15. $\dfrac{4 \cdot 36^n}{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}$,
16. $\dfrac{3^{15} - 3 \cdot 27^4}{3^9 \cdot 6^4}$, 17. $\dfrac{2^{16} - 2 \cdot 8^4}{2^{11} \cdot 14^2}$, 18. $\dfrac{(4 \cdot 3^{17} - 3^{16}) \cdot 242}{(11 \cdot 3^5)^3 \cdot (-2)^3}$,
19. $\dfrac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(-1)^7 \cdot (13 \cdot 8^4)^2}$, 20. $\dfrac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+2} \cdot 5^{2n-2}}$,

21. Найдите число, восьмая степень которого равна $\dfrac{21^9\cdot(6^2\cdot 16)^3}{12^9\cdot 3^4\cdot 63}$,

22. $\dfrac{45^{2n+1}}{(-15)^{2n}\cdot 9^{n-1}\cdot 25}$, 23. $\dfrac{28^{2k+1}}{(-14)^{2k}\cdot 4^{k-1}\cdot 49}$,

24. Какое число и на сколько больше: $A=2\dfrac{54}{55}+1\dfrac{65}{66}$, $B=\dfrac{28^7\cdot 49^2}{16\cdot 14^{10}}$,

25. Какое число и на сколько больше: $A=1\dfrac{32}{33}+1\dfrac{87}{88}$, $B=\dfrac{45^8\cdot 125}{27^2\cdot 15^{10}}$,

26. $\dfrac{(5\cdot 3^{18}+(-3)^{19})\cdot 2^{34}}{12^{18}}$, 27. $\dfrac{(7\cdot 4^8+(-4)^9)\cdot 3^{14}}{36^8}$,

28. На сколько процентов A больше B? $A=\dfrac{(7^{10}-7^9-7^8)^2}{41\cdot 49^8}$, $B=5379^2-5378\cdot 5380$,

29. На сколько процентов A больше B? $A=\dfrac{(4^{10}-4^9-4^7)^2}{47\cdot 16^7}$, $B=9551^2-9552\cdot 9550$,

30. При каких n число $\dfrac{3^{2n-6}\cdot 2^{n+7}}{4^{n-3}\cdot 3^{n+7}}$ будет целым?

31. $(3^{3n+1}-4\cdot 3^{3n+2})(7\cdot 2^n+2^{n+1}):54^{n+1}$, 32. $(2^{3n+1}-11\cdot 2^{3n+2})(3\cdot 7^n+7^{n+1}):56^{n+1}$,

33. $\dfrac{4^{10}-4^9-4^7}{2^{20}+2^{17}+11\cdot 2^{15}}$, 34. $\dfrac{3^{10}-5\cdot 3^8-3^7}{2\cdot 9^4+3^7-10\cdot 9^3}$, 35. $\dfrac{50^3}{(2^2)^3\cdot 5^6}$, 36. $\dfrac{5^{3n+2}\cdot 5^{1-n}}{(5^{n+1})^2}$,

37. $\dfrac{(8^{2020}+8^{2019})^2}{(4^{2019}-4^{2018})^3}$, 38. $\dfrac{(4^{3021}-4^{3020})^3}{(8^{3020}+8^{3019})^2}$, 39. $\dfrac{8^{20}\cdot 20^5}{4^{35}\cdot 25^2}$, 40. $\dfrac{28^3\cdot 5^6}{35^2\cdot 10^4}$,

41. $\dfrac{12^6}{3^5\cdot 2^{11}}$, 42. $\dfrac{20^{10}}{5^{10}\cdot 2^{19}}$,

43. Найдите расстояние между числом, противоположным A, и числом, обратным B, где $A=\dfrac{36^3\cdot 15^2}{18^4\cdot 10^3}$, $B=\dfrac{3^{48}-3^{47}+17\cdot 3^{46}}{27^{15}\cdot 23}$,

44. На координатной прямой найдите расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$, если $a=\dfrac{-14^2\cdot 25^3}{49\cdot(-10)^6}$, $b=\dfrac{7^{40}+7^{38}-2\cdot 7^{39}}{6^2\cdot 49^{19}}$,

45. $\dfrac{3^7\cdot 15^5\cdot 4^9}{8^4\cdot 9^4\cdot 30^4}$, 46. $\dfrac{4^4\cdot((3^3)^2:3^2)}{27^3:3^5}$,

47. Найдите число, восьмая степень которого равна $\dfrac{(12^3\cdot 9^3)^2\cdot 14^9}{6^{18}\cdot 56}$,

48. $\dfrac{(-12a^2b^4)^3(-a)^4}{(-3ab)^3(-2b^2)^3}$, 49. $\dfrac{(-2a^2bc^3)^4(3b)^3}{24a^5(-b^2c^4)^3}$,

50. $\dfrac{42^9}{(6^2)^3\cdot 7^9}+\dfrac{2^{50}-2\cdot 4^{22}}{31\cdot 8^{15}}$, 51. $\dfrac{50^3}{(2^2)^3\cdot 5^6}-\dfrac{3^{32}-3\cdot 9^{14}}{26\cdot 27^{10}}$,

52. $\dfrac{5^2\cdot 54^{27}}{(3^{80}+3^{81}+3^{82})(32^5+8^8+4^{12})}$, 53. $\dfrac{5^2\cdot 24^{27}}{(2^{83}+2^{84}+2^{82})(9^{12}+27^8+81^6)}$.

2.3 Преобразование буквенных выражений

Важным навыком для поступающих в 8 класс является умение работать с буквенными выражениями. Необходимо уметь делать следующее: раскладывать на множители выражения и выполнять действия с алгебраическими дробями.

Разложение на множители. Есть несколько основных способов разложения буквенного выражения на множители: вынесение за скобки общего множителя, применение формул сокращённого умножения, группировка членов многочлена, выделение полного квадрата, комбинация ранее приведённых методов. Вынесение за скобку общего множителя — это применение уже встречавшегося нам распределительного закона умножения. Формулы сокращённого умножения необходимо знать следующие:

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (разность квадратов),
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы),
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности),
4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов),
5. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов),
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы),
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности).

Обратите внимание: НЕТ формулы «сумма квавдратов», выражения вида $x^2 + y^2$ по формуле не раскладываются. Группировка членов многочлена чаще всего производится для того, чтобы затем в пределах группы применить либо метод вынесения за скобку, либо формулы сокращённого умножения. Наиболее сложным и довольно часто встречающимся методом является выделение полного квадрата. Подробный разбор с примерами для всех этих методов можно найти, например, в учебнике Никольского.

Выразить одно через другое. При помощи формул сокращённого умножения можно удобно связать друг с другом различные выражения. Например, вам известно $a^2 + b^2$ и $a + b$. Как в этом случае найти ab? Для этого надо написать формулу квадрата суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. В этой формуле вам известна левая часть и сумма первого и третьего слагаемых правой части. Таким образом, вы можете найти $2ab$, а затем и ab.

Смена знаков. Иногда может возникнуть такая ситуация: выражение похоже на формулу сокращённого умножения, но все знаки в нём не те. Тогда может помочь следующий метод: поставить перед выражением знак «минус» и заключить выражение в скобки. В это случае внутри скобок все знаки поменяются, что поможет нам применить формулу сокращённого умножения. Пример: $a^2+2bc-b^2-c^2 = a^2-(b^2-2bc+c^2) = a^2-(b-c)^2 = (a-(b-c))\,(a+(b-c)) = (a-b+c)(a+b-c)$. Также необходимо помнить, что все знаки меняются в том случае, если перед скобками стоит «минус», поэтому скобки надо раскрывать аккуратно: $x^3-(x-1)(x^2+x-1) = x^3-(x^3-1) = x^3-x^3+1 = 1$.

Алгебраические дроби. Действия с алгебраическими дробями выполняются аналогично действиям с числовыми обыкновенными дробями. Перед сложением или вычитанием надо обязательно **разложить знаменатели дробей на максимально возможное количество множителей** для нахождения общего знаменателя (аналог нахождения НОКа для чисел). Если числитель дроби имеет смысл раскладывать на множители, то надо разложить и его: что-нибудь может сократиться и облегчить дальнейшие вычисления. При умножении и делении также необходимо разложить на множители не только знаменатель, но и числитель для удобства сокращения (в случае с числами это аналогично разложению на простые множители).

Для алгебраических дробей существуют два важных правила. Во-первых, **никогда** не следует раскрывать в скобки в уже **разложенном на множители** знаменателе. Напомним, что разложить выражение на множители — это значит преобразовать его так, чтобы последним выполняемым действием было умножение. Во-вторых, не следует торопиться с раскрытием скобок в числителе. Сначала необходимо привести слагаемые в одну дробь, а потом уже преобразовать числитель при помощи раскрытия скобок, если ничего больше сделать не получается (например, вынести за скобку общий множитель).

Необычная замена. Мы привыкли к тому, что для нахождения численного значения выражения необходимо вместо букв подставлять числа. Интересно, что иногда удобно делать всё наоборот: в примере, букв не содержащем, заменить числовые значения буквенными. Это удобно делать, если числа образуют одну из формул сокращённого умножения. Например: $11,35^2+22,7\cdot 8,65+8,65^2=11,35^2+2\cdot 11,35\cdot 8,65+8,65^2=[a=11,35\ b=8,65]=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(11,35+8,65)^2=20^2=400$.

Модуль. Модуль во вступительных испытания для 7 класса встречается нечасто, но базовые вещи о нём знать необходимо. Модуль числа — это расстояние от него на числовой прямой до нуля. Соответственно, значение модуля не может быть отрицательным. Модуль положительного числа равен ему самому, модуль отрицательного числа «уничтожает» его знак «минус». Модуль отрицательного буквенного выражения, соответственно, меняет в нём все знаки. Пример: $|4-x|=4-x$ при $x\leqslant 4$ и $|4-x|=x-4$ при $x\geqslant 4$.

Задачи. Если не указано иного, то необходимо либо выполнить действия, либо упростить, либо сократить (если в задании одна дробь), либо разложить на множители (если в задании одно выражение).

1. $\left(\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right):\left(\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1)}\right)$,

2. $\left(\dfrac{6-3x}{2(1-x+x^2-x^3)}-\dfrac{2x^2+x-10}{2(x^3+x^2+x+1)}\right):\left(\dfrac{5}{x^2+1}-\dfrac{3}{2(x-1)}+\dfrac{3}{2(x+1)}\right)$,

3. $\dfrac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a-b}}\cdot\left(\dfrac{c^2+2bc}{a^2-b^2}-1\right):\left(1+\dfrac{c}{a+b}\right)^2$, 4. $\dfrac{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{m-n}}{\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{m+n}}:\left(\dfrac{k^2+2nk}{m^2-n^2}-1\right):\left(1-\dfrac{k}{m+n+k}\right)^2$,

5. $\dfrac{\dfrac{m-n}{2m-n}-\dfrac{m^2+n^2+m}{2m^2+mn-n^2}}{(4n^4+4mn^2+m^2):(2n^2+m)}$, 6. $\dfrac{\dfrac{s+t}{2s+t}-\dfrac{s^2+t^2+s}{2s^2-st-t^2}}{(4t^4+4st^2+s^2):(2t^2+s)}$,

7. Сравните $\dfrac{101^2-99^2}{201^2-199^2}$ и $\dfrac{201^2-199^2}{301^2-299^2}$, 8. Сравните $\dfrac{102^2-98^2}{202^2-198^2}$ и $\dfrac{202^2-198^2}{302^2-298^2}$,

9. $\left(\dfrac{2x+3}{x^2-6x+9}:\dfrac{4x^2-9}{9-x^2}+\dfrac{1}{2x-3}\right):\dfrac{1}{2x-6}$, 10. $\left(\dfrac{3x+2}{x^2-4x+4}:\dfrac{9x^2-4}{4-x^2}+\dfrac{1}{3x-2}\right):\dfrac{1}{6x-4}$,

11. $\left(c-\dfrac{c^3+8}{2c+c^2}\right)\cdot\dfrac{c}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{2-c}$, 12. $\dfrac{(a+3)^2}{a}:\left(\dfrac{a^3-27}{a^2-3a}-a\right)-\dfrac{a}{3}$,

13. Вычислите $a(b+1)+b(1-ab)-a^2b$, если $a+b=\dfrac{1}{3}$, $ab=-0,8$,

14. Вычислите $xy(1-y)+x+y(1-x^2)$, если $x+y=0,3$, $xy=-\dfrac{1}{5}$,

15. Верно ли, что при любом натуральном n значение выражения $\dfrac{(4n^2-1)(16n^4+4n^2+1)}{8n^3-1}$ является целым числом?

16. Верно ли, что при любом натуральном n значение выражения $\dfrac{(n^2-4)(n^4+4n^2+16)}{n^3+8}$ является целым числом?

17. Известно, что $x^2+x=a$. Найдите $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{x(x+1)}$,

18. Известно, что $x^2+2x=a$. Найдите $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{2}{x(x+2)}$,

19. $\dfrac{a^2-14ab+49b^2}{49b^2-7ab}$,

20. $\dfrac{9x^2-6xy+y^2}{15x^2-5xy}$,

21. $\left(a-\dfrac{a^2+9}{a+3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{a-3}\right)$,

22. $\left(3-\dfrac{9+4b^2}{3+2b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2b}+\dfrac{2}{3-2b}\right)$,

23. x^4+5x^2+9,

24. x^4+3x^2+4,

25. a^4-a^2-2a-1,

26. a^4+4,

27. $\dfrac{2a^2+3a-5}{4a^2-9a+5}$,

28. $\dfrac{5a^2+7a+2}{3a^2+a-2}$,

29. Найти $(2a-b)^2+(3b+4a)(4a-3b)-(4a-5b)(5a+4b)$ при $a=-1,2,\ b=0,5$,

30. Найти $(3x+y)^2+(2y+5x)(5x-2y)-(2x-y)(17x+y)$ при $x=-1,6,\ y=0,5$,

31. $a(a-b)(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)+b^3+ab^2$,

32. $(c-d)(c^2+cd+d^2)+d(c-d)^2-(c^2-cd)(c+2d)$,

33. $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}$,

34. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$,

35. x^3-2x^2+4x-3,

36. x^3-2x^2-4x+5,

37. $480^3-480^2-480\cdot 479-479^2-479^3$,

38. $494^3-494^2-494\cdot 493-493^2-493^3$,

39. $(4x^2y-28xy^2+49y^3)\cdot\dfrac{3}{4x^2y-49y^3}$,

40. $(25x^2y-40xy^2+16y^3)\cdot\dfrac{2}{25x^2y-16y^3}$,

41. $a^3+a^2c+abc+b^2c-b^3$,

42. $x^3-x^2z+xyz-y^2z+y^3$,

43. $\dfrac{a(b+1)^2-b(a+1)^2}{a^2(b+1)-b^2(a+1)}$,

44. $\dfrac{x^2(y-z)-y^2(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}$,

45. Упростите выражение и найдите его значение при тех x, для которых $|x|=2$, $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)+1$,

46. Упростите выражение и найдите его значение при тех x, для которых $|x|=3$, $(x+1)(x^2-x+1)(x^3-1)+1-x^6+x^4$,

47. Приведите многочлен $4b\cdot ab+(-1)^{2009}\cdot b\cdot(-a)^3-a\cdot(-2b)^2-a^3b+(-ab)a$ к стандартному виду и найдите его значение при $a=-2,\ b=7$,

48. Приведите многочлен $(-ab)\cdot a+9b\cdot ab+(-1)^{2008}\cdot b\cdot(-a)^4-a\cdot(-3b)^2-a^4b$ к стандартному виду и найдите его значение при $a=-3,\ b=5$,

49. $\left(\dfrac{m}{m^2-2m+1}-\dfrac{m+2}{m^2+m-2}\right):\dfrac{1}{(2m-2)^2}$,

50. $\left(\dfrac{n+2}{n^2-n-6}-\dfrac{n}{n^2-6n+9}\right)\cdot(2n-6)^2$,

51. Известно, что $x+y=-1$. Найдите x^3+y^3-3xy.

52. Известно, что $x+y=1$. Найдите x^3+y^3+3xy.

53. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^3-27}$,

54. $\dfrac{x^3+27}{x^2+8x+15}$,

55. $\dfrac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\dfrac{y}{y-6}-\dfrac{2y}{y^2-12y+36}\right)+\dfrac{12y}{y-6}$,

56. $\left(\dfrac{3x}{x-4}-\dfrac{6x}{x^2-8x+16}\right):\dfrac{x-6}{16-x^2}+\dfrac{24x}{x-4}$,

57. $\left(\dfrac{97^3-53^3}{44}+97\cdot53\right):(152,5^2-27,5^2)$, 58. $(36,5^2-27,5^2):\left(\dfrac{57^3+33^3}{90}-57\cdot33\right)$,

59. $\dfrac{a^2-25b^2+10bc-c^2}{a^2-5ab+5bc-c^2}$, 60. $\dfrac{b^2-18b-c^2+81}{b^2+2bc+c^2-9b-9c}$,

61. $\dfrac{b(b-2)-c(c-2)}{b^3-c^3}$, 62. $\dfrac{a(a-3)-p(p+3)}{a^3+p^3}$,

63. $\dfrac{a(a^2-b)-b^2(b-1)}{a^3-2b^3+2a^2b-ab^2}$, 64. $\dfrac{a^2(a-1)-b(a-b^2)}{2a^3+b^3-2ab^2-a^2b}$,

65. $\dfrac{a^3+a^2c+abc-b^3+b^2c}{(b^2+c^2)-(a^2+2bc)}$, 66. $\dfrac{b^3-ab^2+abc+c^3-ac^2}{(a^2+c^2)-(b^2+2ac)}$,

67. $\left(\dfrac{3}{a+6}-\dfrac{2}{a^2+12a+36}\right):\dfrac{3a+16}{a^2-36}$, 68. $\left(\dfrac{2}{a-5}+\dfrac{1}{a^2-10a+25}\right):\dfrac{2a-9}{a^2-25}$,

69. Вычислите значение выражения $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\dfrac{x^2+4x+3}{3+x}$ при $x=\dfrac{11}{15}$, $a=\dfrac{1}{7}$,

70. $\left(1-\dfrac{3}{2-a}\right)^2+\left(\dfrac{2a+1}{a^2-6a+5}-\dfrac{11}{4a-20}\right):\dfrac{a^2-4a+4}{4a^2-4}$,

71. $\left(1-\dfrac{5}{3-b}\right)^2+\left(\dfrac{2b+1}{b^2-6b+8}-\dfrac{9}{2b-8}\right):\dfrac{b^2-6b+9}{2b^2-8}$,

72. $\dfrac{135^2-135\cdot150+75^2}{135^2-15^2+45^2-105^2}$, 73. $\dfrac{105^2-135^2+15^2-45^2}{115^2-115\cdot110+55^2}$,

74. $\left(\dfrac{1}{2-6a}+\dfrac{1}{27a^3-1}:\dfrac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\dfrac{2+6a}{a}$,

75. $\left(\dfrac{1}{2-4b}+\dfrac{b+1}{8b^3-1}\cdot\dfrac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right):\dfrac{1}{4b-2}$, 76. $a^4-b^2\cdot(2a-b)^2$,

77. $\dfrac{2}{x-2}+\left(\dfrac{x^3+8}{x^2+2x}-x\right)\cdot\dfrac{x}{x^2-4x+4}$, 78. $\dfrac{1}{\dfrac{2-a}{a}+1}$,

79. $|x-5|-|3-x|$ при $x<1$, 80. $x^3-8x^2+19x-12$,

81. $-12a^2p+15p^3+8a^4-10a^2p^2$, 82. $x(x+z-y)+y(y-x-z)+(x-y+z)$,

83. $\dfrac{(7,26)^3-(2,74)^3}{4,52}+7,26\cdot2,74$, 84. $\dfrac{x^3-x^2y}{xy-x^2-y+x}$,

85. $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)$,

86. $\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x^2-x-6}+\dfrac{2x}{x-3}\right):\dfrac{2x+1}{x}-\dfrac{x-9}{2(x-3)}$,

87. $a^2+2ab+b^2-ac-bc$, 88. $(b-2)(b^4+2b^3+4b^2+8b+16)$,

89. $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{3ab}{a+b}$, 90. $\dfrac{0,2^2-0,4\cdot0,3+0,09}{0,45-0,5}$,

91. Найдите значение выражения $(2m-n)^2+(m+2n)^2$ при $m=\dfrac{12\frac{1}{2}+\frac{6}{5}-0,6\cdot 1,5}{4}$, $n=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{6}\right)\cdot\dfrac{204}{35}$,

92. x^8+6x^4+25,

93. $\dfrac{x^2-10xy+25y^2}{25y^2-5xy}$,

94. $|12,64^2+11,86^2-14,36^2-15,14^2|-\left|\left(10\frac{2}{3}-5\frac{1}{3}\right)\right|$,

95. $0,613^3-0,613^2+0,613\cdot 0,387-0,387^2+0,387^3$,

96. $\dfrac{(2a+3)^3-(a+2)^3}{7(a^3+a^2)+23(a^2+a)+19a+19}$,

97. Пусть $a+b=-7,\ a\cdot b=12$. Найдите, чему равна величина: $a^2+a^3+b^2+b^3$.

98. Известно, что $x+y=-7,\ xy=12$. Найдите значение выражения $\dfrac{x^3+y^2x+x^2y+y^3}{x^4y+xy^4}$.

99. Сократите дробь $\dfrac{a^3+2ab^2-b^3-2a^2b}{a^5+a^2b^3-b^5-a^3b^2}$ и найдите её значение при $a=-1,1,\ b=0,1$.

100. $|16,56^2+17,44^2-12,44^2-11,56^2|-\left|\left(1057\frac{1}{7}-2315\frac{1}{5}\right):2\right|$,

101. Сократите дробь $\dfrac{x^5-x^3y^2-x^2y^3+y^5}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}$ и найдите её значение при $x=\left|-\frac{1}{4}\right|,\ y=-|1,05|$,

102. Известно, что $a+\dfrac{1}{a}=3$. Найдите значение выражения $\dfrac{a^4+1}{a^2}$,

103. Сократите дробь $\dfrac{x^2-4a^2+2xy+y^2}{(x+y)^2+4a(x+y)+4a^2}$. Найдите значение получившегося выражения при $x=-4\frac{1}{12},\ y=2\frac{1}{6},\ a=\frac{1}{3}$.

104. Упростите выражение $x^3+3x^2(x-1)+3x(x-1)^2+(x-1)^3$ и найдите его значение при $x=3,1$.

105. Упростите выражение $2+(4-c)^3-(65-c((6-c)^2+12))+c(c+2)$ и найдите его значение при $c=-1,41$.

106. $\dfrac{17,31^2+0,69^2-12,69^2-29,31^2}{\frac{1}{3}(0,87^3+2,13^3)+3\cdot 0,87\cdot 2,13}$

107. Сократите дробь $\dfrac{3\cdot(-a)\cdot b^2-a^3-3a^2b-b^3}{ab^2-a^2b+b^3-a^3}$ и найдите её значение при $a=|-0,25|,\ b=-\left|1\frac{3}{7}\right|$.

108. Найдите значение выражения $27x^3-z^3$, если известно, что $3x-z=-7,\ 3xz=2$,

109. Вычислите $\dfrac{4a-5b}{3a+b}$, если известно, что $\dfrac{4b+a}{5a-7b}=2$.

110. Найдите значение выражения x^3+y^3, если $xy=13,\ x^2+y^2=38$,

111. Известно, что $a^2+3b^2=1$. Найдите $a^4+9b^4-3a^2+6a^2b^2-9b^2+1$,

112. Известно, что $x^2-3y^2=1$. Найдите $x^4+9y^4+2x^2-6x^2y^2-6y^2-1$,

113. $\left(\dfrac{5c^2-c}{25c^2-10c+1}+\dfrac{4}{1-25c^2}\right):\left(1-\dfrac{3}{5c-1}\right)-\dfrac{c}{5c+1}$,

114. x^6-4x^2-4x-1,

115. $12x^6-9x^3z^2-3x^3y^4+8y^2x^3-6y^2z^2-2y^6$,

116. $12x^6+9x^3z^2-3x^3y^4-8y^2x^3-6y^2z^2+2y^6$,

117. $a^2+b^2+2ab-a-b-2$,

118. $a^2+b^2-2ab+a-b-2$,

119. $(a-b)^2-b^2-c^2+2bc$,

120. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$,

121. $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-ab-bx}$,

122. $\dfrac{x^2-xc-yc+xy}{x^2+xc-yc-xy}:\dfrac{x^2-xc-xy+yc}{x^2+xc+xy+yc}$,

123. $0,3ac^3-8a^2-4,8ac+\frac{1}{2}a^2c^2$,

124. $0,3ac^3-10a^2-7,5ac+\frac{2}{5}a^2c^2$,

125. $\left(\dfrac{2}{y^2-16}+\dfrac{1}{4y-y^2}\right)^2\cdot\left(y^2+12y+48+\dfrac{64}{y}\right)$,

126. $\left(\dfrac{2}{z^2-9}+\dfrac{1}{3z-z^2}\right)^2\cdot\left(z^2+9z+27+\dfrac{27}{z}\right)$.

2.4 Проценты

Для того, чтобы легко и уверенно решать все задачи про проценты, достаточно запомнить несколько несложных вещей.

Во-первых, необходимо чётко понимать соответствие между процентом, десятичной дробью и обыкновенной дробью. Процент от числа — это его сотая часть, поэтому верны следующие равенства.: $50\% = 0,5 = \frac{1}{2}$, $35\% = 0,35 = \frac{7}{20}$, $150\% = 1,5 = \frac{3}{2}$. Как мы видим, чтобы получить из процента десятичную дробь, достаточно поделить этот процент на 100. Перевод в обыкновенную дробь осуществляется любым удобным способом.

Во-вторых, для того, чтобы найти определённый процент от числа, достаточно умножить это число на соответствующую данному проценту десятичную или обыкновенную дробь. Например, найдём 15% от 240: $240 \cdot 0,15 = 36$. Аналогично чтобы найти число по его проценту, достаточно поделить на дробь, соответствующую этому проценту. Например, пусть 143% от x равны 1001. Тогда $x = 1001 : 1,43 = 700$. Таким образом, мы видим, что для того, чтобы взять процент от числа или найти число по его проценту, необходимо сделать только **одно** действие: умножение или деление.

В-третьих, чтобы узнать, сколько процентов число a составляет от числа b, надо просто разделить a на b и умножить результат на 100. Например, узнаем, сколько процентов составляет 50 от 40: $50 : 40 \cdot 100 = 125\%$. При этом полезно помнить, что само число составляет от себя всегда 100%.

В-четвёртых, чтобы увеличить или уменьшить число на определённый процент, достаточно также сделать только **одно** действие. Например, нам надо увеличить некоторое число x на 5%. Сколько процентов новое число будет составлять от старого? Понятно, что 105%. Но чтобы взять 105% от числа достаточно умножить его на соответствующую дробь, то есть сделать действие $x \cdot 1,05$. Аналогично рассмотрим уменьшение числа x на 15%. Сколько процентов от него останется? Естественно, 85%. Таким образом, достаточно выполнить действие $x \cdot 0,85$. Если в задаче необходимо несколько раз увеличить число на какой-то процент или уменьшить, надо сделать несколько умножений. Ни в коем случае **нельзя складывать или вычитать проценты от разных чисел.** Например, цену на мороженое два года подряд повышали на 10%. На сколько процентов вырастет цена за два года? Ответ «на 20%» неправильный! Правильно было бы выполнить следующие действия: $x \cdot 1,1 \cdot 1,1 = x \cdot 1,21$. Это соответствует увеличению на 21%!

В-пятых, надо уметь рисовать таблицу. В строчках этой таблицы записаны различные ситуации (сушёные/несушёные фрукты, разбавленный/неразбавленный раствор и т.п.), а в столбцах сначала общее количество (масса, объём и т.п.) того, что дано в задаче, затем процентное содержание сухого вещества, кислоты, и т. п. (удобно выразить его в виде десятичной дроби), затем количество (масса, объём и т.п.) сухого вещества, кислоты, и т. п. Зная содержимое нескольких клеток такой таблицы, можно восстановить содержимое всех остальных. Приведём пару примеров.

Первый пример. Яблоки, содержащие 70% воды, потеряли при сушке 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушёные яблоки?

	Масса, кг	% с. в., в десят. дроб.	Масса с. в., кг
Свежие яблоки	m	0,3	$0,3m$
Сушёные яблоки	$0,4m$	0,75	$0,3m$

Эту табличку заполняем в такой последовательности:
1) Зная процент содержания воды, находим процент содержания сухого вещества и заносим его в таблицу.
2) Обозначаем массу яблок буквой m, так как она не дана.
3) Выражаем через m количество сухого вещества в свежих яблоках. В сухих яблоках оно точно такое же, поэтому соответствующую клетку тоже сразу заполняем.
4) Выражаем через m новую массу яблок (60% потеряно, значит 40% осталось).
5) Находим, сколько процентов сухое вещество составляет от новой массы и заносим результат в таблицу.

Итак, таблица заполнена. Для получения ответа осталось только вычесть из 100% процент сухого вещества: $100\% - 75\% = 25\%$.

Второй пример. Сколько граммов воды нужно добавить к 600г раствора, содержащего 15% соли, чтобы получить 10%-ый раствор соли?

	Масса, г	% соли, в десят. дроб.	Масса соли, г
Исходный раствор	600	0,15	90
Новый раствор	900	0,1	90

Эту табличку заполняем в такой последовательности:
1) Вносим исходные данные: массу раствора, процентное содержание соли в исходном растворе и получившемся.
2) Находим количество соли в исходном растворе. В новом растворе оно будет таким же.
3) Зная количество соли в новом растворе и её процентное содержание, находим массу нового раствора.
После заполнения таблицы остаётся только найти разницу между массой исходного раствора и нового: 900г-600г=300г.

Задачи. Многие (но не все) задачи рекомендуется решать при помощи таблиц, некоторые из них при этом могут быть сложнее стандартных. При этом задачи, которые можно решать просто по действиям, тоже встречаются.
1. На весеннем турслёте ФМЛ №239 было 60% учащихся лицея, а на уборке листьев в Летнем саду было 80% лицеистов. При этом каждый ученик лицея был на слёте или в Летнем саду. Сколько процентов учащихся лицея были и на слёте, и на уборке листьев?
2. На новогоднем вечере в ФМЛ №239 80% учащихся лицея, пришедших на вечер, были на представлении, а на дискотеке — 90%. Сколько процентов лицеистов, пришедших на новогодний вечер, были и на представлении, и на дискотеке?
3. Найдите положительное число, если 45% от него составляют столько же, сколько составляют 20% от числа, ему обратного.
4. Найти положительное число, если 27% от него равны 90% от его квадрата.
5. Число 8 составляет 50% от числа $2N + 6$. Найдите $N + 1$.
6. Найдите число a, если 50% от числа $a + 1$ равно 40% от числа $a + 3$.
7. Свежий виноград содержит 75% влаги, а сушёный виноград (изюм) — 6%. Сколько потребуется свежего винограда для приготовления 4 кг изюма?
8. Свежий виноград содержит 80% влаги, а сушёный виноград (изюм) — 5%. Сколько потребуется свежего винограда для приготовления 1 кг изюма?
9. Груши, содержащие 65% воды, при сушке потеряли 50% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушёные груши?
10. Яблоки, содержащие, 70% воды, при сушке потеряли 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушёные яблоки?
11. Одна сторона прямоугольника равна 90 см, а другая составляет 70% длины первой. Найдите периметр и площадь этого прямоугольника.
12. Одна сторона прямоугольника равна 80 см, а другая составляет 65% длины первой. Найдите периметр и площадь этого прямоугольника.
13. Банковский вклад в мае увеличился на 20%, а в июне уменьшился на 20%, после чего на счёте оказалось 6720 рублей. Найдите сумму вклада на конец апреля.
14. Банковский вклад в мае увеличился на 10%, а в июне уменьшился на 10%, после чего на счёте оказалось 10890 рублей. Найдите сумму вклада на конец апреля.
15. Лёша на 20% умнее Вадика, а Костя на 10% умнее Лёши. На сколько процентов Костя умнее Вадика?
16. Ира разговаривает по телефону на 25% больше чем Люба, а Яна разговаривает по телефону на

10% больше чем Ира. На сколько процентов Яна разговаривает по телефону больше чем Люба?
17. Избирательная комиссия после выборов недосчиталась 20% бюллетеней от числа всех проголосовавших. Спустя некоторое время нашли 70% пропавших бюллетеней, а затем ещё 5% от числа всех голосовавших. Все ли пропавшие бюллетени нашли?
18. Избирательная комиссия после выборов недосчиталась 30% бюллетеней от числа всех проголосовавших. Спустя некоторое время нашли 80% пропавших бюллетеней, а затем ещё 5% от числа всех голосовавших. Все ли пропавшие бюллетени нашли?
19. В классе число отсутствующих составляет 25% от числа присутствующих. После того, как пришёл один опоздавший, число присутствующих стало в пять раз больше числа отсутствующих. Сколько всего человек в классе?
20. В классе число отсутствующих составляет 20% от числа присутствующих. После того, как один ученик ушёл, число присутствующих стало в четыре раза больше числа отсутствующих. Сколько всего человек в классе?
21. Длину прямоугольного участка земли увеличили на 30%, а ширину — на 20%, в результате чего его площадь увеличилась на 28 м^2. Определите площадь исходного участка.
22. Длину прямоугольного участка земли увеличили на 40%, а ширину — на 10%, в результате чего его площадь увеличилась на 27 м^2. Определите площадь исходного участка.
23. Население города N ежегодно увеличивается на 6% За последние два года в нём стало на 86520 человек больше. Сколько сейчас жителей в N?
24. Население города N ежегодно увеличивается на 7% За последние два года в нём стало на 86940 человек больше. Сколько сейчас жителей в N?
25. Если брат отдаст сестре 300 рублей, то денег у них станет поровну. Если сестра отдаст брату 40% своих денег, то у неё станет в три раза меньше денег, чем у брата. Определите, сколько денег у брата и сколько у сестры.
26. Если сестра отдаст брату 400 рублей, то денег у них станет поровну. Если брат отдаст сестре 20% своих денег, то у неё станет в два раза больше денег, чем у брата. Определите, сколько денег у брата и сколько у сестры.
27. Есть два куска разных сплавов серебра, весят они одинаково, но доля серебра в них различна. Если сплавить первый кусок с половиной второго, то в полученном сплаве будет 40% серебра, а если наоборот — второй с половиной первого, то будет 50% серебра. Найти, сколько процентов серебра в каждом куске.
28. У Васи есть своя коллекция фантиков, у Пети — своя. Как-то раз они решили поменяться фантиками. Сначала Вася отдал Пете 10% своих фантиков. Затем Петя перемешал свою новую коллекцию, выбрал 10% фантиков и отдал их Васе, который с изумлением обнаружил, что теперь у него стало столько же фантиков, сколько было сначала. Наконец, Вася передал Пете 36% фантиков. Определите, во сколько раз увеличилось число фантиков в коллекции Пети после всех обменов.
29. У Васи есть своя коллекция фантиков, у Пети — своя. Как-то раз они решили поменяться фантиками. Сначала Петя отдал Васе 20% своих фантиков. Затем Вася перемешал свою новую коллекцию, выбрал 20% фантиков и отдал их Пете, который с изумлением обнаружил, что теперь у него стало столько же фантиков, сколько было сначала. Наконец, Петя передал Васе 48% фантиков. Определите, во сколько раз увеличилось число фантиков в коллекции Васи после всех обменов.
30. Сколько воды нужно добавить к 750г 15% раствора сахара, чтобы процентное содержание сахара стало 5%?
31. Сколько воды нужно выпарить из 1,5кг 5% раствора соли, чтобы концентрация соли составила 12%?
32. Первое число составляет 80% от третьего числа, а второе — 30% от третьего числа. Найдите эти числа, если их среднее арифметическое равно 21,21.
33. Мама оставила Васе деньги на завтрак. После того, как Вася купил сок за 20 рублей, у него осталось ещё 90% от исходной суммы. Сколько рублей оставила мама Васе?
34. Сколько получится сухой ромашки из 80 кг свежей, если она при сушке теряет 65% своего веса?

35. В январе килограмм винограда стоил 200 рублей. В марте цена на виноград выросла на 4%, а в июне снизилась на 4%. Сколько стоил виноград в июне?
36. Смешали 7 литров 16%-го раствора некоторого вещества с 3 литрами 6%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию полученного раствора.
37. Разделите число 80 на две части так, чтобы одна часть составляла 60% от другой.
38. Из двух положительных чисел одно увеличили на 1%, другое на 4%, при этом их сумма увеличилась на 3%. Найти большее из этих чисел, если меньшее равно 8.
39. Имеются два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 30%, а во втором — 50% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 35% золота?
40. Из данных четырёх чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{15} : 0,1 : \frac{1}{3}$, а четвёртое составляет 80% третьего. Найдите эти числа, если известно, что разность между суммой третьего и четвёртого числа и суммой первого и второго числа равна 26.
41. Имеются два сплава, массы которых отличаются на 54 килограмма. Первый сплав содержит 10% олова, второй — 30% олова. Из этих двух сплавов получили третий сплав, который содержит $18,2\%$ олова. Найдите массу более лёгкого сплава.
42. В двух магазинах были одинаковые цены на некоторый товар. В первом магазине цены на этот товар уменьшили на 20%, а потом ещё на 20%, а во втором магазине цену снизили сразу на 40%. Найдите отношение цены товара в первом магазине к цене товара во втором магазине после всех снижений.
43. Цена одной упаковки вареников с вишней в течение года менялась три раза. Сначала она увеличилась на 20%, затем уменьшилась на 5% и, наконец, возросла на 20%. Определите первоначальную цену упаковки вареников, если в конце года она была 171 рубль.
44. Даны числа a и b, такие что $a > b > 1$. Расположите в порядке возрастания следующие числа: $\frac{b}{a}; a \cdot b; (90\%\text{ от } a) \cdot (120\%\text{ от } b); \frac{b^2}{a^2}; (a-b)(b-a)$.
45. Даны числа a и b, такие что $a > b > 1$. Расположите в порядке возрастания следующие числа: $\frac{b}{a}; b \cdot a; (170\%\text{ от } a) \cdot (90\%\text{ от } b); \frac{b^2}{a^2}; (a-b)(b-a)$.
46. Сплав массой 600г содержит 10% меди. Сколько меди нужно добавить к этому количеству сплава, чтобы в новом сплаве содержалось 20% меди?
47. Представьте число 200 в виде двух слагаемых, таких, что 25% одного равны $37,5\%$ другого.
48. Представьте 200 в виде разности так, что 30% уменьшаемого равны 70% вычитаемого.
49. Смешали 30 г 20 %-го раствора соли с 10 г другого раствора, и получили раствор с концентрацией соли 25 %. Определить концентрацию соли во втором растворе.
50. Сплав серебра с золотом содержит 40% золота. Сколько нужно добавить золота к слитку сплава весом 10 кг, чтобы в образовавшемся новом сплаве золота стало 80%?
51. Кусок сплава меди с оловом имеет массу 60 кг и содержит 60% олова. Сколько чистой меди следует добавить к этому сплаву, чтобы содержание олова в нём составило 40%?
52. Разделите 90 на две части так, чтобы 40% одной части были на 15 больше, чем 30% другой части.
53. В свежих грибах 80% воды. При сушке грибов испарилось 75% имевшейся в них воды. Сколько процентов составляет масса воды в сухих грибах от общей массы сухих грибов?
54. При сушке грибов испарилось 80% имевшейся в них воды. Доля воды в сушёных грибах составляет 25% общей массы сушёных грибов. Найдите, сколько процентов массы свежих грибов составляла вода.
55. В туристическом клубе девочки составляли 25%. После того, как в клуб приняли ещё десять девочек, девочки стали составлять 30%. Сколько мальчиков в клубе?
56. В хоре мальчики составляли 25%. После того, как в хор приняли ещё трёх мальчиков, мальчики стали составлять 28%. Сколько девочек в хоре?

2.5 Уравнения и неравенства

В этом разделе мы рассмотрим несколько видов уравнений, которые могут встретиться. Решение неравенств же во вступительных олимпиадах обычно сводится к тому, чтобы выяснить, больше или меньше нуля может быть определённое буквенное выражение.

Линейные уравнения. Линейные уравнения — это уравнения, в которые переменная входит в первой степени. Решается такое уравнение всегда одинаково: все «иксы» (или другие буквы) переносятся в одну часть, все числа — в другую, а затем приводятся подобные слагаемые и производится деление на получившийся при букве коэффициент. Надо обязательно помнить, что при переносе из одной части в другую у слагаемых меняется стоявший перед ними знак. Простейший пример: $3x-5=5x-13,\ 3x-5x=-13+5,\ -2x=-8,\ x=(-8):(-2),\ x=4.$ Естественно, уравнения во вступительных олимпиадах настолько простыми не являются и предполагают приведение к этому виду (если оно возможно).

Линейные уравнения с дробями. Если в уравнении присутствуют несколько дробей, то необходимо домножить **все** члены уравнения на общий знаменатель этих дробей, внимательно при этом следя за знаками. Пример:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-x}{4}-\frac{x-2}{6}=1+\frac{2x}{8},\\
&6\cdot(1-x)-4\cdot(x-2)=24\cdot 1+3\cdot 2x,\\
&6-6x-4x+8=24+6x,\\
&-6x-4x-6x=24-8-6,\\
&-16x=10,\\
&x=-\frac{10}{16}=-\frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

В любом уравнении (или даже системе уравнений) с дробями всегда удобно домножить на общий знаменатель.

Уравнения, сводящиеся к линейным. Некоторые уравнения изначально кажутся более сложными, так как содержат степени выше первой. Но чаще всего (в 7 классе) после приведения подобных такие уравнения также сводятся к линейным. Пример:

$$\begin{aligned}
&x^2(x+1)-x(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)+3x-4,\\
&x^3+x^2-x^2+x=x^3-1+3x-4,\\
&-2x=-4,\\
&x=2.
\end{aligned}$$

Сумма неотрицательных выражений. Как известно, существуют выражения, которые никогда не могут быть отрицательными: это модуль и квадрат выражения (как в принципе и любая чётная степень). На этом соображении построен отдельный тип уравнений, доступных уже в 7 классе. Например, дано уравнение: $x^2+|y+2|=2x-1$. Переносим всё в левую часть и удобно группируем: $x^2-2x+1+|y+2|=0$. Применяем формулу квадрата разности: $(x-1)^2+|y+2|=0$. Итак, сумма двух выражений равна нулю. Но ни одно из этих выражений не может быть меньше нуля, может быть только больше! Значит, они оба нулю равны и поэтому $x=1,\ y=-2$. Таким же же способом (выделением полных квадратов и других неотрицательных выражений) можно решить вопрос о том, может ли исходное выражение быть отрицательным. Например, выражение $x^2-2x-2(x-5)=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$ может принимать только положительные значения (не меньше 6).

Системы уравнений. Чаще всего во вступительных работах встречаются системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Самый простой метод их решения такой: домножить одно из уравнений на подходящее число так, чтобы коэффициент при одной из букв совпал с коэффициентом в другом уравнении, после чего вычесть из одного уравнения другое. В таком случае одна из переменных сократится и останется обыкновенное линейное уравнение с одной неизвестной. Если какой-то из коэффициентов был отрицательным, то вместо вычитания уравнения следует сложить. Приведём пример:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 3x - y = 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 15x - 5y = 5. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 17x = 17. \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Здесь мы второе уравнение домножили на 5 и сложили с первым. Таким образом удалось найти x, после чего, подставив найденное значение в любое из исходных уравнений, легко найти y. Есть и другой способ: выразить при помощи одного уравнения одну из переменных через другую и подставить в другое уравнение, но обычно он менее удобен. Заметим также, что уравнение можно не только складывать и вычитать, но и умножать и делить друг на друга. Главное — не забывать производить одинаковые действия с обеими частями. Системы уравнений также часто появляются при решении текстовых задач.

Уравнения второй степени. Может так получиться, что x^2 из уравнения не пропал. В таком случае необходимо перенести все иксы в левую часть, после чего применить **метод выделения полного квадрата** и разложить полученное выражение на множители. Затем следует воспользоваться тем, что если произведение неких выражений равно нулю, то одно из этих выражений должно быть равно нулю, после чего найти неизвестную. Пример:

$$x(x-2) = 3x + 6, \; x^2 - 2x - 3x - 6 = 0, \; x^2 - 5x - 6 = 0, \; \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0, \; (x-6)(x+1) = 0.$$

Отсюда $x = 6$ или $x = -1$.

Пропорции. Чтобы решить уравнение, сведённое к пропорции, достаточно применить **основное свойство пропорции**: произведения крайних членов и средних членов равны друг другу. Пример: $\dfrac{3x-1}{4} = \dfrac{5x}{2}, \; 6x - 2 = 20x, \; -14x = 2, \; x = -\dfrac{1}{7}.$

Недопустимые значения. Заметим, что не все значения переменной, полученные в результате решения уравнения, могут быть записаны в окончательный ответ. Есть важное правило: **нельзя делить на ноль**. Поэтому те значения переменной, при которых обращался в ноль хотя бы какой-нибудь из знаменателей **исходного уравнения**, в ответе указывать нельзя, они не являются корнями уравнения. Например, рассмотрим уравнение $\dfrac{x^2-7}{x-4} = \dfrac{9}{x-4}$. У этих дробей одинаковый знаменатель, поэтому для их равенства необходимо, чтобы одинаковым был и числитель, то есть $x^2 - 7 = 9, \; x^2 = 16, \; x = \pm 4$. Но при $x = 4$ в знаменателях исходных дробей получаем 0! Поэтому ответ в данном уравнении только $x = -4$.

Замена переменных. Если мы видим, что в уравнении (или системе) несколько раз встречаются одинаковые выражения от переменных, то можно эти выражения заменить на новые буквы, что облегчит задачу. Пример:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 4,5, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4. \end{cases}, \quad \begin{matrix} \begin{cases} a + 3b = 4,5, \\ 2a + b = 4. \end{cases} \\ \dfrac{1}{x} = a, \; \dfrac{1}{y} = b \end{matrix}, \quad \begin{cases} 2a + 6b = 9, \\ 2a + b = 4. \end{cases}, \quad \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}, \\ b = 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = 1. \end{cases}.$$

Уравнения с параметром. Есть уравнения, в которых вас просят найти значение некоторой переменной (например x), но при этом в уравнении содержатся и другие буквы. Тогда следует выразить искомую переменную через остальные буквы, которые в таких заданиях называются параметрами. При этом может возникнуть вопрос: сколько решений имеет уравнение в зависимости от значений этих самых параметров? Например, решим уравнение $(a^2-1)x = a-1$. Несложно найти, что $x = \dfrac{1}{a+1}$. Но при всех ли значениях параметра a можно давать такой ответ? Конечно же, нет, ведь при $a=-1$ мы будем иметь ноль в знаменателе! Такие значения параметров надо подставлять в исходное уравнение, получим $0=-2$, а значит решений нет. Но на этом исследование уравнения не заканчивается. В процессе поиска x мы делили на выражение $a-1$, а ведь оно тоже может быть равно нулю! Подставив значение $a=1$ в исходное уравнение, получим равенство $0=0$, а значит подходит любое значение переменной x. Итого, ответ такой: при $a=-1$ решений нет, при $a=1$ — любое число, при всех остальных значениях $a:$ $x=\dfrac{1}{a+1}$.

Задачи. Если в задании просто написано уравнении (или система), то необходимо его (или её) решать. Если надо исследовать выражение, будет записано уточнённое задание.

1. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{1}{30}-\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{5}\right)$, 2. $\dfrac{y}{4}+\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{1}{30}-\dfrac{y}{2}-\dfrac{y}{3}$,

3. $\begin{cases} x^2-2xy=1025, \\ x-2y=25. \end{cases}$, 4. $\begin{cases} x^2+2xy=1080, \\ x+2y=40. \end{cases}$,

5. Существуют ли такие значения x, при подстановке которых значение выражения $4+(x+1)^2-4(x+1)$ будет отрицательно?

6. Существуют ли такие значения x, при подстановке которых значение выражения $(4-x)^2+25-10(4-x)$ будет отрицательно?

7. $\dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{x-3}{2}=4x$, 8. $\dfrac{3x+11}{2}-\dfrac{2x+7}{3}=4x$,

9. $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x+2)(x-2)=12$,

10. $(x+1)(x^2-x+1)-x(x+3)(x-3)=10$,

11. $\dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{1-x}{4}+\dfrac{5x+1}{20}=3-x$, 12. $\dfrac{x-2}{5}-\dfrac{5-2x}{4}+\dfrac{4x-1}{20}=4-x$,

13. Найдите все пары чисел x, y, для каждой из которых значение выражения $(x+y)^2-10x+4y-2xy+29$ равно нулю,

14. Найдите все пары чисел x, y, для каждой из которых значение выражения $(x-y)^2+2x+4y+2xy+5$ равно нулю,

15. $x+\dfrac{2x-7}{2}-\dfrac{3x+1}{5}=5-\dfrac{x+6}{2}$, 16. $\dfrac{2x-5}{6}+\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{5-2x}{3}-\dfrac{6-7x}{4}-x$,

17. Докажите, что выражение $2x(3-x)-(x+1)(x+5)+4$ принимает лишь отрицательные значения,

18. Докажите, что выражение $3x(1-2x)-(x+2)(x+1)+1$ принимает лишь отрицательные значения,

19. Найдите все числа x, y, удовлетворяющие условию $9x^2+y^2-12x+2y+5=0$,

20. Найдите все числа x, y, удовлетворяющие условию $4x^2+y^2-4x+4y+5=0$,

21. Существуют ли такие значения чисел x, y при которых многочлены $2x^2+5xy-8$ и $3y^2-5xy+10$ одновременно принимали бы отрицательные значения?

22. Существуют ли такие значения чисел x, y при которых многочлены $3x^2-7xy+5$ и $2y^2+7xy-4$ одновременно принимали бы отрицательные значения?

23. $x - \frac{20x - (10 - 3x)}{156} = \frac{26x - 51}{52} - \frac{2(1 - 3x)}{13}$,

24. $\frac{3(1,2 - x)}{10} - \frac{5 + 7x}{4} = x + \frac{9x + 0,2}{20} - \frac{4(13x - 0,6)}{5}$,

25. $\frac{2x - 3}{9} - \frac{3x - 9}{2} + 2x = 3 - \frac{2 - x}{3}$, 26. $\frac{3x - 2}{9} - \frac{2x - 3}{2} + 3x = 2 - \frac{9 - x}{3}$,

27. Докажите, что выражение $9x^2 + 8y - 6xy + y^2 + 18 - 24x$ принимает положительные значения при любых значениях переменных,

28. Докажите, что выражение $16y^2 + 6x - 8xy + x^2 + 12 - 24y$ принимает положительные значения при любых значениях переменных,

29. Найдите $|k - 3 - 5k^2|$, где k — корень уравнения
$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 2x(2x - 3)(2x + 3) = 38x + 3$,

30. Найдите $|m - 1 - 10m^2|$, где m — корень уравнения
$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 2x(2x + 5)(2x - 5) = 30x - 1$,

31. $x^2y^2 + 17 + x^2 - 8xy + 2x = 0$, 32. $x^2y^2 + 10 + y^2 + 6xy - 2y = 0$,

33. $\frac{2x - 3}{5} + \frac{5x + 1}{20} = 3 - x - \frac{x - 1}{4}$, 34. $\frac{x - 2}{5} + \frac{2x - 5}{4} = 4 - x - \frac{4x - 1}{20}$,

35. $5(x + 2) - (2 - 3x)^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - (2x - 1)(27x - 1)$,

36. $9(4 - x) - (3 - 2x)^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - (3x - 2)(12x - 1)$,

37. $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 6x + 9 = 0$, 38. $5x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 1 = 0$,

39. $\frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$, 40. $\frac{2x - 3}{5} - \frac{1 - x}{4} + \frac{5x + 1}{20} = 3 - x$,

41. $\begin{cases} \frac{x + 3y}{4} + \frac{4x - 2y}{3} = -\frac{7}{6}, \\ \frac{x + 3y}{6} + \frac{2x - y}{4} = \frac{7}{12}. \end{cases}$, 42. $\frac{44}{4 - x^2} + \frac{2x + 7}{x - 2} = \frac{3 - x}{x + 2}$,

43. $\frac{3x - 1}{7} - \frac{2x + 1}{2} = \frac{x}{14} - 1$, 44. $\frac{7}{x - 2} = 3 + \frac{x^3 + 27}{(x + 3)(x - 2)}$,

45. $\frac{x^2 - 4x - 8}{5x - x^2} = \frac{x^2 - 3x - 7}{x(x - 5)}$, 46. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{9}{y - 1} = -2, \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y - 1} = 3. \end{cases}$,

47. $\frac{9 - 4a^2 - 4ab - b^2}{4a^2 + 2ab + 3b - 9} = \frac{3 + 2a + b}{x}$, 48. $(x - 7) : \frac{1}{3} \cdot 5 = 7 : 1,4 \cdot x + 9x$,

49. $\frac{x + 3}{8} = \frac{x - 7}{3} + 1$, 50. $\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{2x - y} = \frac{7}{12}, \\ \frac{1}{2x - y} - \frac{1}{x + y} = \frac{5}{12}. \end{cases}$,

51. $3(x + 1)(x + 2) = 12 + (3x - 4)(x + 2)$, 52. $\begin{cases} 4x^2 - 49y^2 = 10(2x - 7y), \\ x + y = 45. \end{cases}$,

53. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x + 5)(x - 5) = 23$, 54. $\frac{2x - 1}{6} - \frac{3 - x}{4} = 6 - x$,

55. $49(x - 1)^2 + 14(x - 1) + 1 = 0$,

56. $|x + y - z| + (y - 3)^2 + (2x - 4)^4 = 0$,

57. $(x - 2)^3 - x(1 - 2x)^2 + (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) = 24x^3 - 2x^2$,

58. $\frac{(x - 1)^2 - 5(x - 1) + 4}{x - 2} = 0$, 59. $(2x^5 - 242x^3)^4 + |33 - 3|x|| = 0$,

60. $(4|x| - 3,4)\left(2|x| + 7\frac{1}{3}\right)^3 = \left(2|x| + 7\frac{1}{3}\right)(4|x| - 3,4)^3$,

61. $x-(2x+(3x-(4x+(5x-7))))=11,$

62. $\dfrac{(x-2)^3+(x+2)^3}{x+2,25}=\dfrac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x+2,25},$

63. $\left(\dfrac{97^3-53^3}{44}+97\cdot 53\right):(152,5^2-27,5^2)=x:(19,25^2-18,25\cdot 20,25),$

64. $\left(\dfrac{4x-7}{0,2}+\dfrac{6x-3}{0,4}\right)^2=\left(70-\dfrac{4x+1}{0,3}\right)^2,$ 65. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2+3x-6}=0,$

66. $(x^2+1)(18x-17)(29-30x)=0,$ 67. $(x^2+6x+5)^2+|1-|x||=0,$

68. $|2y-x|+(7-|3y+1|)^6=0,$ 69. $\left((2-7x)^2-0,26\right)^2-0,01=0,$

70. $\dfrac{36-16x^2}{2x-3}=\dfrac{24-12x}{x-2}-12,$ 71. $\dfrac{64-4x^2}{x-4}=\dfrac{11-22x}{2x-1}-7,$

72. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x+2}{2}=1,$ 73. $(1-3x)(x+1)=(3x-1)(2x+1),$

74. $(x+4)^2=x+4,$ 75. $\dfrac{x^3-9x}{x^2-6x+9}=0,$

76. $\dfrac{5x-1}{4}-\dfrac{x-2}{3}=10-x,$ 77. $(x+1)(x^2-x+1)-x(x+2)(x-2)=3,$

78. Верно ли утверждение «Если $x\geqslant -5,5,$ то $x>-6$»?

79. Дано уравнение $a^2(x-1)=9(9x+9-2a)$. Найдите все те значения параметра a, при каждом из которых данное уравнение: а) не имеет корней; б) имеет ровно один корень; в) имеет более одного корня.

80. Дано уравнение $4a^2(x-1)+9(x+1)=12ax$. а) При каких a уравнение имеет корень, равный 1? б) Решите уравнение при $a=-2$; в) При каких a уравнение имеет более двух корней?

81. При каком a уравнение $(a^2-4)x=a^2+5a+6$ имеет бесконечно много решений?

82. При каких значениях параметра a уравнение $a^3-a^2x=5ax+25a$ имеет бесконечно много корней?

83. При каких значениях параметра p уравнение $p^3x+6p^2=9px+p^3+9p$ не имеет корней?

84. Докажите, что многочлен x^2+2x+y^2-4y+6 при любых значениях входящих в него переменных принимает положительные значения,

85. Докажите, что многочлен $x^2-4x+y^2-6y+15$ при любых значениях входящих в него переменных принимает положительные значения,

86. Для каждого значения параметра a решите уравнение: $a^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a-3}{x}.$

87. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $6x+1=0$ и $2x-a=0$ имеют общие корни.

88. $\dfrac{9+7x}{2}-1+\dfrac{1-2x}{7}=3x.$ 89. $\dfrac{7y}{12}+\dfrac{2-y}{4}-1=\dfrac{5y-6}{9}-\dfrac{1}{2}.$

90. Решите систему уравнений относительно x и y: $\begin{cases}2x-3y=5b-a,\\3x-2y=a+5b.\end{cases}$

91. Решите систему уравнений относительно x и y: $\begin{cases}5x-2y=3a+7b,\\2x-5y=7b-3a.\end{cases}$

92. $\dfrac{3x-7}{4}-\dfrac{9x+11}{8}=\dfrac{3-x}{2},$ 93. $\dfrac{4x-3}{2}-\dfrac{5-2x}{3}=\dfrac{3x-4}{3},$

94. $(3x-1)^2-8(x+1)^2=(x+2)(x-2),$ 95. $(2x+1)^2-3(x-5)^2=(x+3)(x-3),$

96. $x^2+4y^2+z^2=12y-2x-4z-14,$ 97. $9x^2+y^2+z^2=6y-12x+4z-17.$

2.6 Прямые на координатной плоскости

Способ записи. Уравнение прямой на плоскости можно записать разными способами. Наиболее общий способ такой: $ax + by + c = 0$, где a, b и c – некоторые фиксированные числа или коэффициенты. Наиболее простой и удобный способ: $y = kx + b$, где k и b также являются коэффициентами. При этом совсем не трудно из одного способа получить другой: выразить y через x в первом случае и перенести всё в левую часть во втором. Исключение составляют лишь вертикальные прямые (например, $x = 3$): в таком случае никакой буквы y в уравнении просто нет.

Как рисовать. Изобразить прямую, уравнение которой вы уже узнали, довольно просто: достаточно подставить два разных значения x, подсчитать для них соответствующие значения y и получить две точки. После этого надо поставить эти точки на координатную плоскость и при помощи линейки провести через них прямую. При этом практически всегда удобно брать $x = 0$ и $x = \pm 1$.

Вопрос принадлежности. Если нам необходимо узнать, принадлежит ли некоторая точка заданной прямой, то ответить на этот вопрос достаточно просто, необходимо просто подставить координаты заданной точки в уравнение этой прямой. Если получится верное равенство, то ответ положительный, в противном случае — нет. Например, узнаем, принадлежат ли точки $A(2;3)$ и $B(-1;4)$ прямой $y = 2x - 1$. При подстановке координат точки A имеем верное равенство $3 = 2 \cdot 2 - 1$. При подстановке точки B имеем равенство $4 = 2 \cdot (-1) - 1$, которое верным не является. Поэтому точка A лежит на этой прямой, а точка B — нет.

Стандартные задачи. Существуют три вида стандартных задач, на комбинации которые строятся большинство задач на соответствующую тематику.
Задача 1. Провести прямую через заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Эта задача решается следующим образом: пусть наша прямая имеет вид $y = kx+b$. Подставим тогда в её уравнение координаты обеих точек, получим систему уравнений $\begin{cases} y_1 = kx_1 + b, \\ y_2 = kx_2 + b. \end{cases}$. Её всегда можно решить, если вычесть из первого уравнения второе: свободный коэффициент b никогда ни на что не умножается и всегда сократится, позволяя найти k.

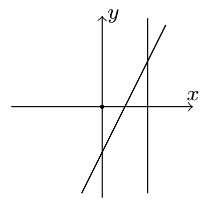
Рассмотрим числовой пример. Пусть надо провести прямую через точки $A(2;5)$ и $B(-1;-4)$. Искомая прямая имеет вид $y = kx + b$, тогда $\begin{cases} 5 = k \cdot 2 + b, \\ -4 = k \cdot (-1) + b. \end{cases}$, $\begin{cases} 5 = k \cdot 2 + b, \\ 9 = 3k. \end{cases}$, $\begin{cases} b = -1, \\ k = 3. \end{cases}$.
Итак, наш ответ $y = 3x - 1$.
Задача 2. Найти точку пересечения прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Эта задача решается так: надо просто приравнять друг к другу правые части заданных уравнений. Тогда мы найдём тот x, при котором и левые части будут одинаковые, а значит найденная точка принадлежит обеим прямым.

Рассмотрим числовой пример. Найдём точку пересечения прямых $y = 5x - 7$ и $y = 3x + 5$. Приравняем правые части: $5x - 7 = 3x + 5$, $5x - 3x = 5 + 7$, $2x = 12$, $x = 6$. Отсюда $y = 5 \cdot 6 - 7 = 23$. Итак, наш ответ точка $(6; 23)$.
Задача 3. Провести через точку $A(x_1; y_1)$ прямую , параллельную прямой $y = k_1 x + b$. Чтобы решить эту задачу, необходимо воспользоваться следующим фактом: у параллельных прямых коэффициенты при x равны. И тогда задача окажется совсем простой, ведь у искомой прямой будет заранее известен один из двух коэффициентов.

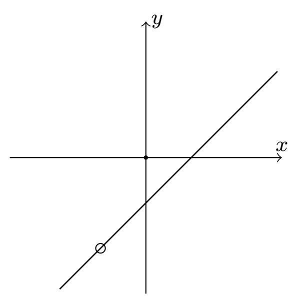
Рассмотрим числовой пример. Провести через точку $A(4;2)$ прямую, параллельную прямой $y = 239 - 3x$. Мы сразу понимаем, что у искомой прямой $y = kx + b$ коэффициент $k = -3$. Подставим тогда координаты заданной точки: $2 = (-3) \cdot 4 + b$, откуда $b = 14$. Итак, наш ответ $y = -3x + 14$.

Множества на плоскости. Иногда в задаче требуется изобразить на плоскости не просто прямую, а некоторое множество точек. Рассмотрим пару примеров.

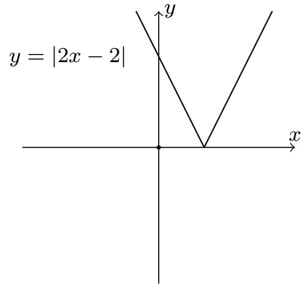
Пусть необходимо изобразить множество точек, удовлетворяющих уравнению $(x-1)(y-2x+1)=0$. Для того, чтобы это сделать, сначала мы должны понять, что произведение двух множителей равно нулю только если один из них равен нулю, то есть $x-1=0$ или $y-2x+1=0$, откуда $x=1$ или $y=2x-1$. И тогда нашим ответом будут просто нарисованные на одних и тех же осях две прямые: $x=1$ и $y=2x-1$.

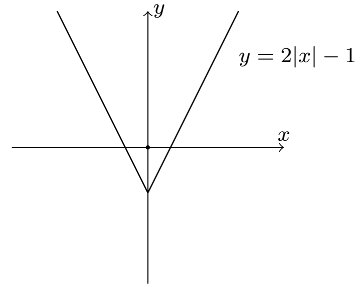


Выколотые точки. Как мы знаем, не все действия в математике допустимы. В седьмом классе мы столкнёмся только с одним недопустимым действием: с делением на 0. И тогда на нашем графике может появиться так называемая *выколотая* точка (а то и не одна). Это те точки, которые, казалось бы, лежат на графике, но они соответствую тем значениям x (или y), которые нельзя подставлять в исходное выражение, так как они обратят в ноль знаменатель. Например, пусть надо построить множество точек, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{3x-2-y}{x+1}=0$. Чтобы дробь была равна нулю, необходимо, чтобы был равен нулю её числитель, то есть $3x-2-y=0$, $y=3x-2$. Таким образом, необходимо построить график прямой $y=3x-2$. Но при этом у нас есть выражение $x+1$ в знаменателе! Поэтому необходимо избавиться от той точки, у которой $x=-1$, на данном графике это будет точка с координатами $(-1;-5)$. Её и необходимо выколоть, то есть обвести в небольшой кружок, показав, что нашему графику она не принадлежит. При этом выкалывать надо даже те точки, чьё влияние на знаменатель, казалось бы, уже никак не ощущается: в графике функции $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$ точку с абсциссой -1 выколоть всё равно необходимо.



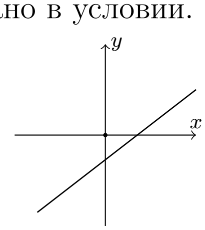
Модуль. Чтобы построить график функции $y=|ax+b|$, надо построить график функции $y=ax+b$ и ту его часть, которая была под осью абсцисс, симметрично отразить наверх (а внизу стереть). Чтобы построить график функции $y=a|x|+b$, надо построить график функции $y=ax+b$ и ту его часть, которая была правее оси ординат, симметрично отразить влево (а то, что там было до этого, стереть).



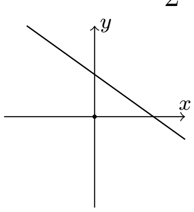


Изучение графиков. На какие вопросы о функции можно ответить, если дан её график без каких-либо конкретных значений? Основных всего на два: про знаки коэффициента k при x и свободного член b. Если график функции идёт «вправо-вверх», то $k > 0$, если он горизонтален, то $k = 0$, если же идёт «вправо-вниз», то $k < 0$. Если график пересекает ось ординат ниже нуля, то $b < 0$, если в начале координат, то $b = 0$, если выше нуля, то $b > 0$ (последнее верно так как при подстановке $x = 0$ получается $y = b$, то есть b — это просто значение функции в нуле). Также можно сравнить коэффициенты при x двух графиков: чем больше по модулю коэффициент, тем «круче» наклон.

Задачи. Строить график функции в задаче необходимо только в том случае, если это прямо указано в условии.

1. 

На рисунке изображён график функции вида $y = kx + b$. Для этого графика ответьте на вопросы: а) Каков знак коэффициента k? б) Проходит ли график через точку $(1; b)$?
в) Пусть $k = \dfrac{1}{2}; b = -2$. Проходит ли график функции через точку $(1,22; -1,38)$?

2. 

На рисунке изображён график функции вида $y = kx + b$. Для этого графика ответьте на вопросы: а) Каков знак коэффициента k? б) Проходит ли график через точку $(-1; b)$?
в) Пусть $k = 2; b = 1$. Проходит ли график функции через точку $(1,73; 3,47)$?

3. Найти число a такое, что точка пересечения прямых, задаваемых уравнениями
$y = \dfrac{1}{4}x + 3a$ и $y = \dfrac{1}{2}x - a$, имеет абсциссу 8.

4. Найти число p такое, что точка пересечения прямых, задаваемых уравнениями
$y = \dfrac{1}{3}x + 2p$ и $y = \dfrac{1}{2}x + p$, имеет абсциссу 3.

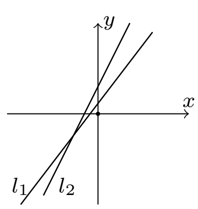
5. Построить множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x - 5)(2y + 4x - 6) = 0$.

6. Построить множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x + 4)(3y - 6x + 9) = 0$.

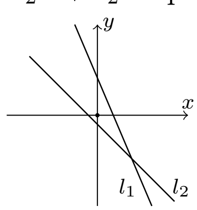
7. При каких a прямые, заданные уравнениями $x = a - 3y$ и $2y = 5 - a - 3x$ пересекаются в точке, принадлежащей прямой $y = 2x + 1$?

8. При каких b прямые, заданные уравнениями $x = 2y + b$ и $3y = b - 1 + x$ пересекаются в точке, принадлежащей прямой $y = x - 8$?

9. При каком k прямая $y = kx + 4$ отсекает от осей координат в I четверти равнобедренный треугольник?
10. При каком k прямая $y = kx + 5$ отсекает от осей координат в I четверти равнобедренный треугольник?
11. Дана линейная функция $y = kx + 1$.
а) Постройте график этой функции, если он проходит через точку $A(239; 1196)$.
б) При каком значении k данная прямая образует вместе с осями координат прямоугольный треугольник, у которого один катет в 5 раз больше другого?
12. Дана линейная функция $y = ax + 2$.
а) Постройте график этой функции, если он проходит через точку $B(79; 239)$.
б) При каком значении a данная прямая образует вместе с осями координат прямоугольный треугольник, у которого один катет в 1,5 раз больше другого?
13. а) Постройте треугольник, ограниченный прямыми а) $y = \dfrac{2}{3}x + 2$, $y = -\dfrac{2}{3}x - 2$ и осью OY.
б) При каких значениях b прямая $y = -x + b$ имеет с треугольником хотя бы одну общую точку?
14. а) Постройте треугольник, ограниченный прямыми а) $y = \dfrac{2}{3}x - 2$, $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$ и осью OY.
б) При каких значениях b прямая $y = -x + b$ имеет с треугольником хотя бы одну общую точку?
15. Известно, что прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, проходит через точки $A(4; -6)$ и $B(-8; -12)$. Найдите k и b, а также координаты точки пересечения с прямой $2x + y = 2$.
16. Известно, что прямая, заданная уравнением $y = kx+b$, проходит через точки $A(2; 1)$ и $B(-4; 10)$. Найдите k и b, а также координаты точки пересечения с прямой $3x - y = 5$.
17. Постройте график функции $y = |4x - 3|$.
18. Постройте график функции $y = 4|x| - 3$.
19. Найдите значения k и b функции вида $y = kx+b$, если известно, что график функции проходит через точки $M(3; 9)$ и $N(-6; -9)$. Найдите координаты точки пересечения этого графика с прямой $y = 6$.
20. Найдите значения k и b функции вида $y = kx+b$, если известно, что график функции проходит через точки $A(3; 9)$ и $B(-2; -6)$. Найдите координаты точки пересечения этого графика с прямой $y = -3$.

21. 

На рисунке прямая l_1 задана уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая l_2 уравнением $y = k_2x + b_2$. Сравните k_1b_1 и k_2b_2.

22. 

На рисунке прямая l_1 задана уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая l_2 уравнением $y = k_2x + b_2$. Сравните k_1b_1 и k_2b_2.

23. Постройте график функции $y = -3x - 1$ и найдите, при каких значениях x значения y не больше 2.
24. Постройте график функции $y = -5x - 4$ и найдите, при каких значениях x значения y не меньше 16.
25. Постройте множество точек $(x; y)$ на плоскости, для которых $\dfrac{(x^2 - 9)(y + x - 1)}{x - 3} = 0$.
26. Постройте множество точек $(x; y)$ на плоскости, для которых $\dfrac{(x^2 - 4)(y - x + 1)}{x - 2} = 0$.

27. Найдите координаты точки, через которую проходят графики функций $y = 2 - k - kx$ при любых значениях k.
28. Найдите координаты точки, через которую проходят графики функций $y = 1 - k + kx$ при любых значениях k.
29. На координатной плоскости задано множество точек $(x; y)$, причём ординаты точек вычисляются по формуле $y = 3 - 2x$.
а) изобразите на координатной плоскости множество данных точек.
б) найдите число, квадрат которого даёт абсциссу точки $A(x; -239)$, если известно, что A — одна из точек этого множества.
30. На координатной плоскости задано множество точек $(x; y)$, причём ординаты точек вычисляются по формуле $y = 2x - 3$.
а) изобразите на координатной плоскости множество данных точек.
б) найдите число, квадрат которого даёт абсциссу точки $B(x; 239)$, если известно, что B — одна из точек этого множества.
31. Дана функция $y = 3,6x - 1$.
а) Запишите уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $D(-0,5; 8,2)$. Постройте найденную прямую.
б) Напишите уравнения каких-либо двух прямых, не совпадающих с осями координат, которые вместе с данной прямой ограничивают на координатной плоскости прямоугольный треугольник.
32. Дана функция $y = -1,5x + 4$.
а) Запишите уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $D(7; -2,5)$. Постройте найденную прямую.
б) Напишите уравнения каких-либо двух прямых, не совпадающих с осями координат, которые вместе с данной прямой ограничивают на координатной плоскости прямоугольный треугольник.
33. Постройте график функции $y = kx + b$, если он параллелен прямой $y = 2x$ и проходит через точку $A(2; 7)$. Укажите три точки, принадлежащие данному графику.
34. Постройте график функции $y = kx + b$, если он параллелен прямой $y = -3x$ и проходит через точку $A(1; 4)$. Укажите три точки, принадлежащие данному графику.
35. График линейной функции проходит через точку $A(9; -18)$ и точку пересечения прямых $y = x - 7$ и $y = 8x$. Задайте функцию формулой и постройте график функции.
36. График линейной функции проходит через точку $A(-6; 12)$ и точку пересечения прямых $y = -3x$ и $y = x + 12$. Задайте функцию формулой и постройте график функции.
37. Постройте график прямой $y = -6kx + 3b - 9$, где числа k и b — это соответственно абсцисса и ордината точки пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 8x + 7$.
38. Постройте график прямой $y = 3kx - 0,6 \cdot b$ где числа k и b — это соответственно абсцисса и ордината точки пересечения прямых $y = 2x - 4$ и $y = 8x - 6$.
39. Определите линейную функцию, если её график удовлетворяет условиям:
— он параллелен графику функции $y = -3x - 7$
— он проходит через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y = -2x + 2$ и $y = 3x - 13$.
40. Определите линейную функцию, если её график удовлетворяет условиям:
— он параллелен графику функции $y = -2x + 7$
— он проходит через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y = 2x + 11$ и $y = -3x - 9$.
41. Найдите уравнения прямых AB и CD и координаты точки их пересечения, если известны координаты точек: $A(3; 8)$, $B(12; 5)$, $C(4; 2)$, $D(2; -3)$.
42. Найдите уравнения прямых AB и CD и координаты точки их пересечения, если известны координаты точек: $A(2; 4)$, $B(4; 1)$, $C(3; -4)$, $D(12; 2)$.
43. Определите, лежат ли точки $A(10; -2)$, $B(20; 3)$ и $C(2016; 1001)$ на одной прямой.
44. Определите, лежат ли точки $A(9; -2)$, $B(18; 1)$ и $C(2016; 667)$ на одной прямой.
45. Найдите число p, если известно, что точки $A\left(-\frac{1}{3}; 7\right)$, $B(3; -3)$ и $C\left(\frac{p-1}{2}; p\right)$ лежат на одной

прямой. Запишите уравнение этой прямой.

46. Найдите число p, если известно, что точки $A\left(-\frac{1}{2};-5\right)$, $B(-4;2)$ и $C\left(\frac{p+2}{2};p\right)$ лежат на одной прямой. Запишите уравнение этой прямой.

47. График функции $y=kx+b$ проходит через точки $(4;-5)$ и $(k;0)$. Постройте его и найдите точку пересечения с прямой $5x-2y+17=0$.

48. Найдите все значения m, при каждом из которых прямая $y=(2m+1)x+1-4m$ проходит через точку пересечения прямых $y=\frac{x}{3}-8,5$ и $y=-6x+20$.

49. Найдите все значения t, при каждом из которых прямая $y=(2t-1)x+9,5-5t$ проходит через точку пересечения прямых $y=\frac{x}{3}-6,5$ и $y=-4x+26$.

50. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=-\frac{1}{2}x+11$ и проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y=2x-5$ и $y=-x+4$. Постройте график заданной функции.

51. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=-\frac{1}{3}x-21$ и проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y=-2x+4$ и $y=\frac{1}{2}x+1$. Постройте график заданной функции.

52. Постройте график функции $y=\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$.

53. Рассматривается линейная функция $y=ax+b$, найдите все значения a и b, при которых:
а) график этой функции проходит через точки $(-2;-1)$ и $(1;5)$.
б) график этой функции не проходит через точки, произведение координат которых положительно.

54. Изобразите на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $(y-2)(x-y)=0$.

55. Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y|=|x+1|$.

56. Пусть $A(2;3)$ и $B(-2;-1)$ — две вершины квадрата. Найдите координаты двух оставшихся вершин.

57. Прямая $y=-0,5x+4$ пересекает ось Ox в точке B, а ось Oy — в точке A. Считая начало координат за точку O, написать уравнение прямой BC, если известно, что отрезок BA является медианой треугольника CBO, и постройте эту прямую на координатной плоскости.

58. Постройте график функции $y=(x^2-4)\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)-x$.

59. Постройте график функции $y=\frac{|x|}{x}\left(-\frac{1}{2}x+2\right)$.

60. Постройте график уравнения $\frac{(y^2-4)(y+2x-1)}{x-1}=0$.

61. Задайте а) графически и б) аналитически функцию, которая при x таких, что $0<x<1$ принимает все значения y такие, что $0\le y\le 1$, и не принимает других значений.

62. Найдите все значения параметра a, при которых график следующей функции проходит через начало координат.

$$y=\frac{5a}{a-5}\cdot(x^2-1)+\frac{a^2}{a-5}.$$

63. Найдите все значения параметра b, при которых точка графика следующей функции с абсциссой $-\frac{4}{3}$ лежит на оси абсцисс.

$$y=\frac{x-b}{3x+1}+bx.$$

64. Построить на одном чертеже графики функций $y = 4x - 1$ и $y = (2 - 0,5x) : (-0,125)$, указав точки пересечения обоих графиков с осями координат и между собой, если такие точки существуют.

65. Пусть A — точка пересечения прямых $y = \frac{1}{3}x - 2$ и $y = 6 - x$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A и пересекающейся с прямой $y = -4x - 3$ в точке, лежащей на оси Oy. Постройте эту прямую.

66. График функции $f(x) = kx + 3$ проходит через точку $A(-1; 1)$.
а) Постройте график этой функции. б) Найдите коэффициент k.
в) Найдите площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.
г) Выясните, пересекается ли эта прямая с прямой $y = 5x + 7$.

67. Множество точек на координатной плоскости задано условием $a \le x \le a + 6$,
$-a \le y \le 2a$.
а) Изобразите это множество при $a = 3$. б) Найдите значение a, при котором указанное множество точек будет являться квадратом.

68. Постройте треугольник, ограниченный прямыми $y = \frac{1}{4}x - 2$; $y = 2,5$ и $y = -3x$.

69. Запишите уравнение прямой $ax + by = c$ (где a, b, c — целые числа), проходящей через точки $M(2; -5)$ и $N(0; -2)$.

70. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(3; 1)$ относительно прямой $y = x + 2$.

71. а) Упростите выражение $f(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 2x + 4} + \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} - \frac{1}{x - 2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{2}{2 - x}\right)$.

б) Постройте график функции $y = \frac{1}{f(x)}$.

72. Даны точки $A(0; -7)$, $B(3; 2)$, $C(1; 1)$, $D(-30; 63)$.
а) Напишите уравнение прямых AB и CD.
б) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пресечения прямых AB и CD, пересекающей прямую BC в точке, лежащей на оси абсцисс.

73. Даны точки $A(0; 4)$, $B(1; -4)$, $C(-3; -2)$, $D(-20; 59)$.
а) Напишите уравнение прямых AC и BD.
б) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пресечения прямых AC и BD, пересекающей прямую BC в точке, лежащей на оси абсцисс.

74. а) Постройте график функции $y = 4 - 2x$.
б) Найдите расстояние от точки пересечения этого графика с осью абсцисс до точки пересечения прямых $y = x + 2$ и $2x + 3y - 16 = 0$.

75. а) Постройте график функции $y = 6 - 2x$.
б) Найдите расстояние от точки пересечения этого графика с осью абсцисс до точки пересечения прямых $y = x + 3$ и $x - 2y + 9 = 0$.

76. Пусть точка A является точкой пересечения графика функции $y = -2x + 2$ с осью OY, а точка B — с осью OX. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану треугольника AOB, проведённую из вершины A. (Точка O — начало координат)

77. Пусть точка A является точкой пересечения графика функции $y = 2x + 2$ с осью OY, а точка B — с осью OX. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану треугольника AOB, проведённую из вершины A. (Точка O — начало координат)

2.7 Стандартные задачи

К стандартным задачам, встречающимся на вступительных олимпиадах, можно отнести следующие: задачи на проценты (приведены в отдельной главе), задачи на движение, задачи на совместную работу и задачи на составление систем линейных уравнений. Разберём по одной задачи каждого из трёх последних видов.

Движение Расстояние между двумя населёнными пунктами по реке равно 60км. Это расстояние теплоход проплывает по течению реки за 2ч, а против течения — за 3ч. Найдите собственную скорость теплохода и скорость течения реки.

Задачи на движение, как и задачи на проценты, удобно решать при помощи таблиц.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
По течению	30	2	60
Против течения	20	3	60

В данном случае таблица заполняется справа налево: по известным расстоянию и времени легко находится скорость. Теперь, обозначив собственную скорость катера за x, а скорость течения за y, имеем

$$\begin{cases} x+y=30, \\ x-y=20. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x=50, \\ x-y=20. \end{cases}, \quad \begin{cases} x=25, \\ y=5. \end{cases}.$$

В результате собственная скорость катера равна 25км/ч, а скорость течения равна 5км/ч. Обратите внимание, что все единицы измерения должны быть одинаковы. Если скорость в задаче измеряется в километрах в часах, то расстояние обязательно должно измеряться в километрах, ни в коем случае не в метрах! Аналогично в таком случае время не может измеряться в минутах. Если в условии задачи даны различные единицы измерения, необходимо их привести к одинаковым. Также в задачах на скорость не следует забывать, что **средняя скорость** — это всё пройденное расстояние поделённое на всё затраченное рвемя, а не среднее арифметическое скоростей.

Совместная работа Через первую трубу бассейн можно заполнить за 3 часа, через вторую – за 6 часов. За какое время будет заполнен бассейн, если открыть обе трубы?

Задачи на совместную работу также удобно решать при помощи таблиц.

	Скорость работы, б/ч	Время, ч	Объём работы, б
Первая труба	$\frac{1}{3}$	3	1
Вторая труба	$\frac{1}{6}$	6	1
Вместе	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	$1\colon \frac{1}{2}=2$	1

Главное соображение в таких задачах — это то, что при совместной работе складываются **скорости,** а не время. Поэтому при решении задач, которые предполагают составление уравнений, неизвестными надо брать именно скорости и выражать всё через них.

Составление системы уравнений Если числитель дроби умножить на 2, а из знаменателя вычесть 2, то получится 2. Если же из числителя вычесть 4, а знаменатель умножить на 4, то получится $\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

Пусть числитель этой дроби равен x, а знаменатель — y. Тогда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y-2} = 2, \\ \dfrac{x-4}{4y} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x = 2y - 4, \\ 12x - 48 = 4y. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - 2y = -4, \\ 12x - 4y = 48. \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - y = 12. \end{cases},$$

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ -2x = -14. \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y = -2, \\ x = 7. \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 9, \\ x = 7. \end{cases}$$

Таким образом, искомая дробь равна $\dfrac{7}{9}$.

Задачи. В этом разделе будут собраны те задачи, которые можно отнести к одному из стандартных видов. Остальным задачам будет посвящена отдельная глава.

1. В овощной магазин завезли картофель и морковь. В первый день продали 40% картофеля и $\dfrac{2}{3}$ моркови, что составило 20т. Во второй день продали $\dfrac{2}{3}$ оставшегося картофеля и всю оставшуюся морковь — всего 15т. Сколько картофеля и сколько моркови было завезено в магазин?

2. В город отправляли арбузы и дыни. В первый день отправили $\dfrac{1}{3}$ всех арбузов и 60% всех дынь, что составило 44т. Во второй день отправили 46т, которые составились из 75% оставшихся арбузов и всех оставшихся дынь. Сколько арбузов и сколько дынь было выделено для отправки в город?

3. Велосипедист собирался проехать 210 км с постоянной скоростью. Из-за дождя первую половину пути он ехал со скоростью на 40% меньше намеченной. Чтобы наверстать упущенное, вторую половину пути он ехал со скоростью на 40% больше намеченной. В результате он опоздал к намеченному сроку на 2 часа. С какой скоростью он предполагал ехать?

4. Участник авторалли рассчитывал проехать расстояние 360 км с постоянной скоростью. Из-за тумана первую половину дистанции он ехал со скоростью на 20% меньше намеченной. На второй половине пути, чтобы наверстать упущенное время, он увеличил скорость на 20% по сравнению с намеченной. В результате он затратил на весь путь на 15 минут больше, чем предполагал. С какой скоростью он предполагал ехать?

5. За 3 часа Люба на мотоцикле проезжает то же расстояние, что Вадик на велосипеде за 5ч. Скорость мотоцикла на 12 км/ч больше скорости велосипедиста. Определить скорость каждого.

6. Костя на «Жигулях» за 2 часа проезжает на 50 км больше, чем Ира на BMW за 1 час. Скорость BMW в 1,5 раза больше скорости «Жигулей». Определить скорость каждого.

7. Расстояние между городами A и B машина прошла за 1ч 15 мин. Обратный путь машина прошла за 1ч 30 мин. Найдите скорость машины, если известно, что на обратном пути скорость машины была на 10 км/ч меньше.

8. Теплоход прошёл расстояние между пунктами A и B по течению за 4ч 30 мин, а из B в A против течения он прошёл за 6ч 18мин. Какова скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения 2,4 км/ч?

9. Из посёлка в город выехал автобус со скоростью 60 км/ч. Через час после выезда автобуса из посёлка выехал мотоцикл и догнал автобус через 4 часа после выезда автобуса. С какой скоростью ехал мотоциклист?

10. Расстояние между посёлками A и B равно 300 км. Из посёлка A в посёлок B выехал автобус, движущийся с постоянной скоростью 60 км/ч. Через час после выезда автобуса из посёлка B в посёлок A с постоянной скоростью выехал мотоциклист, который встретился с автобусом через 1,5 часа. С какой скоростью ехал мотоциклист?

11. Два поезда вышли в разное время навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 1231 км. Скорость первого поезда 50 км/ч, а второго 59 км/ч. Пройдя расстояние 700 км, первый поезд встретился со вторым. На сколько часов один из них вышел раньше другого?

12. Два автомобиля вышли в разное время навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 910 км. Скорость первого автомобиля 80 км/ч, а второго 90 км/ч. Пройдя расстояние 640 км, первый автомобиль встретился со вторым. На сколько часов один из них вышел позже другого?
13. Болельщик хочет успеть на стадион к началу матча. Если он пойдёт из дома пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч, а если поедет на велосипеде со скоростью 10 км/ч, то приедет за 30 мин до начала матча. Чему равно расстояние от дома до стадиона?
14. Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин, а если на мопеде со скоростью 40 км/ч, то приедет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?
15. Скорость катера по течению реки равна 45,2 км/ч, а против — 36,2 км/ч. Найти скорость течения реки.
16. Скорость катера по течению реки равна 40,6 км/ч, а против — 32,6 км/ч. Найти скорость течения реки.
17. Половину пути мотоциклист ехал со скоростью 45 км/ч, а затем задержался на 10 мин, а поэтому, чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 15 км/ч. Каков весь путь мотоциклиста?
18. Автобус прошёл $\frac{5}{6}$ пути со скоростью 50 км/ч, а затем задержался на 3 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, оставшуюся часть пути он шёл со скоростью 60 км/ч. Найдите путь, пройденный автобусом.
19. Автомобилист преодолел расстояние от города до посёлка за 1 ч 12 мин, двигаясь с постоянной скоростью. Когда он поехал обратно, пошёл дождь, поэтому автомобилист снизил скорость на 20 км/ч и ехал на 24 мин дольше. Найдите расстояние между городом и посёлком.
20. Автомобилист в дождливую погоду преодолел расстояние от города до посёлка за 1 ч 48 мин, двигаясь с постоянной скоростью. Когда он поехал обратно, выглянуло солнце, поэтому автомобилист увеличил скорость на 20 км/ч и доехал на 24 мин быстрее. Найдите расстояние между городом и посёлком.
21. Через первую трубу бассейн наполняется за 35 минут. За сколько минут наполняет бассейн вторая труба, если вместе они наполняют его за 10 минут?
22. Вася съедает торт за 28 минут. За сколько этот торт съедает Петя, если вместе они съедят его за 12 минут?
23. Скорость течения реки составляет 5% от скорости катера. Двигаясь против течения, катер за 3 часа проходит на 40 км меньше, чем за 3 часа 40 минут по течению. Найдите скорость катера против течения.
24. Скорость течения реки составляет 10% от скорости лодки. Двигаясь против течения реки, лодка за 3 часа 20 минут проходит на 28 км меньше, чем за 4 часа движения по течению. Найдите скорость лодки по течению.
25. Маше задано выучить английские глаголы и существительные. Утром она выучила $\frac{1}{12}$ всех глаголов и $\frac{1}{16}$ всех существительных, всего 5 слов. Вечером она выучила ещё $\frac{1}{4}$ всех оставшихся глаголов и $\frac{1}{5}$ всех оставшихся существительных. Оказалось, что вечером Маша выучила на 8 глаголов больше, чем существительных. Сколько существительных и сколько глаголов было задано Маше?
26. Васе задано решить задачи по алгебре и геометрии. В первый день он решил $\frac{1}{15}$ всех задач по алгебре и $\frac{1}{25}$ всех задач по геометрии, получилось 5 задач. Во второй день он решил $\frac{1}{7}$ остатка задач по алгебре и $\frac{1}{6}$ оставшихся задач по геометрии. Оказалось, что во второй день задач по геометрии

Вася решил на 2 больше, чем по алгебре. Сколько задач по алгебре и сколько задач по геометрии было задано?

27. Два зайца и пять кроликов съедают одну тарелку моркови за восемь секунд, а семь зайцев и четыре кролика съедают такую же тарелку моркови за четыре секунды. Определите, за сколько секунд с этим же количеством моркови справятся заяц и два кролика (все зайцы едят одинаково быстро, все кролики — тоже).

28. Три зайца и два кролика съедают одну тарелку моркови за двенадцать секунд, а пять зайцев и восемь кроликов съедают такую же тарелку моркови за четыре секунды. Определите, за сколько секунд с этим же количеством моркови справятся два зайца и кролик (все зайцы едят одинаково быстро, все кролики — тоже).

29. Если Вася идёт в спортшколу пешком, а возвращается на трамвае, то всего он затрачивает на дорогу 1,5 часа. Если же он в качестве дополнительной тренировки в обе стороны идёт пешком, то на всю дорогу в спортшколу и обратно домой у него уходит 2,5 часа. Какое время Вася затратит на дорогу в спортшколу и обратно домой, если он весь путь проедет на трамвае?

30. Двигаясь с определённой скоростью, пешеход пройдёт намеченный путь за 2,5 ч. Но если через 2 часа от начала пути уменьшит свою скорость на 4 км/ч, то пройдёт весь путь за 3 часа. Найдите длину пути.

31. Двадцать семь карандашей и тридцать три ручки стоят 246 рублей. Сколько стоит карандаш, если он на 2 рубля дешевле ручки?

32. Пешеход идёт вдоль дороги. Мимо него проезжают попутные автобусы с интервалом 12 минут. С каким интервалом в минутах автобусы проезжают мимо остановки, если скорость автобуса в шесть раз больше скорости пешехода?

33. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 часов. Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то ему потребовалось бы на тот же путь 8 часов. Каким было расстояние и скорость движения грузовика?

34. Из двух городов A и B, расстояние между которыми равно 600 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Через 2 ч 24 мин расстояние между ними стало равным 240 км. С какой скоростью идут поезда, если скорость первого поезда на 14 км/ч больше скорости второго?

35. Пешеход половину пути шёл со скоростью 3 км/ч, а другую половину пути со скоростью 5 км/ч. Найти длину всего пути, пройденного пешеходом, если всего он находился в пути 8 часов.

36. Оксана делает некоторую работу за 7 часов, Марина за 6 часов, а Борис Викторович за 3 часа. После того, как Оксана сделала половину всей работы, к ней присоединились Марина и Борис Викторович. За какое время была сделана вся работа и какую её часть сделала Марина?

37. Путь от города до посёлка автомобиль проезжает за 2,5 ч. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он проедет путь на 15 км больший, чем расстояние от города до посёлка. Найдите это расстояние.

38. Из A в B выехали два велосипедиста. Первый половину времени, затраченного на весь путь, ехал со скоростью 25 км/ч, а остальное время — со скоростью 20 км/ч. Второй первую половину пути ехал со скоростью 20 км/ч, а вторую со скоростью 25 км/ч. Кто из них раньше приехал в B?

39. Таня и Люба красят забор за 12 часов, Таня и Катя выкрасят этот же забор за 20 часов, а Люба и Катя — за 15 часов. За работу всем трём девочкам заплатили 1800 рублей. Сколько денег должна получить каждая девочка?

40. От станции к посёлку, удалённому на 104 км, отправились одновременно мотоциклист и автомобилист. Скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости мотоцикла. Прибыв в посёлок, автомобиль сразу повернул обратно и встретил мотоциклиста через 1 ч 36 мин после его выезда со станции. На каком расстоянии от станции произошла встреча?

41. Бассейн заполняется водой, поступающей из двух труб. Первая труба может наполнить бассейн за 12 часов, а вторая — за 20ч. После двух часов работы одной первой трубы была включена вторая труба. Сколько времени ушло на заполнение всего бассейна, и какую часть бассейна заполнила первая труба?

42. Лена и Наташа живут в одном доме и учатся в одной школе. Лена доходит от дома до школы за 20 минут, а Наташа — за 30 минут. Через сколько минут Лена догонит Наташу, если Наташа выйдет из дома на 5 минут раньше Лены?
43. Надо застелить ковром пол в комнате, ширина которой на 1 м меньше длины. Если купить ковёр, длина и ширина которого на 50 см меньше длины и ширины комнаты, то он будет на 2550 р дешевле, чем ковёр, покрывающий весь пол. Найдите длину и ширину комнаты, если известно, что 1 $м^2$ ковра стоит 600р.
44. Катер за 3 часа по течению и 5 часов против течения проходит 76 км. Найдите скорость течения и собственную скорость катера, если за 6 часов по течению катер проходит столько же, сколько за 9 часов против течения.
45. Петя вышел из школы и пошёл по направлению к дому со скоростью 4 км/ч. Одновременно с ним от дома к школе выехал на мопеде его брат Серёжа со скоростью 42 км/ч. Встретив по дороге Петю, Серёжа доехал до школы, мгновенно развернулся и поехал к дому. Таким образом Серёжа ездил между домом и школой до тех пор, пока Петя не пришёл домой. Сколько раз братья встретятся, пока Петя идёт от школы до дома, если расстояние между зданиями 2,8 км?
46. Ребёнок Эрвин за полгода обучения в школе научился доезжать до неё за одно и то же время. Каждое утро он тратит на поездку в метро вдвое больше времени, чем на поездку на троллейбусе, при этом 8 минут, что составляет $\dfrac{2}{9}$ от всей поездки в метро, он тратит на ожидание поездов и подъём на эскалаторе. Сколько времени Эрвин добирается до школы, если на весь пеший путь он тратит на 29 минут меньше, чем проводит в метро?
47. Ребёнок Эрвин за полгода обучения в школе научился доезжать из неё до дома за одно и то же время. Каждый вечер он тратит на поездку в метро втрое больше времени, чем на поездку на троллейбусе, при этом 9 минут, что составляет $\dfrac{3}{13}$ от всей поездки в метро, он тратит на ожидание поезда и подъём на эскалаторе. Сколько времени Эрвин добирается до дома, если на весь пеший путь он тратит на 31 минуту меньше, чем проводит в метро.
48. Бригада из 5 садовников за 3 часа посадила 30 деревьев. Сколько деревьев посадят 4 садовника за 4 часа?
49. Стог сена корова съедает за 6 дней, а коза — за 12 дней. За сколько дней они съедят стог сена вместе?
50. Три бригады вспахали два поля общей площадью 96 га. Первое поле было вспахано за 3 дня, причём работали все вместе. Второе поле вспахали за 6 дней вторая и третья бригады. Если бы все три бригады проработали на втором поле 1 день, то оставшаяся часть второго поля первая бригада могла бы вспахать за 8 дней. Сколько гектаров в день может вспахать первая бригада?
51. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, которые расположены на расстоянии 60 км друг от друга и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из поездов увеличил скорость на 25 км/ч, а другой на 20 км/ч, то они прибыли бы в C также одновременно, но на два часа раньше. Найдите скорости поездов.
52. Карлсон съедает банку варенья за 10 минут, Фрекен Бок — за 12 минут, а Малыш — за 15 минут. За сколько минут они съедят банку варенья втроём?
53. Петя и Вася вскапывают грядку за 10 минут, а один Петя — за 15 минут. На сколько минут Вася дольше Пети вскапывает грядку, работая один?
54. Два пешехода вышли одновременно из своих сёл A и B навстречу друг другу. После встречи первый шёл 50 минут до села B, а второй шёл 18 минут до села A. Сколько минут они шли до встречи?
55. Два пешехода вышли одновременно из своих сёл A и B навстречу друг другу. После встречи первый шёл 45 минут до села B, а второй шёл 20 минут до села A. Сколько минут они шли до встречи?
56. Мастер и ученик должны были каждый день вместе делать некоторое число деталей. В первый день ученик работал три часа, а мастер — два, в результате они сделали 0,9 нужного числа деталей. Во второй день наоборот — мастер работал три часа, а ученик два и они перевыполнили план на 15%. За какое время справился бы с заданием ученик в одиночку?

57. Мастер и ученик должны были каждый день вместе делать некоторое число деталей. В первый день ученик работал три часа, а мастер — два, в результате они сделали $\frac{4}{5}$ нужного числа деталей. Во второй день наоборот — мастер работал три часа, а ученик два и они перевыполнили план на 5%. За какое время справился бы с заданием ученик в одиночку?

2.8 Нестандартные задачи

В этом разделе будут собраны не совсем стандартные задачи, входящие в программу не каждой школы. Какого-то общего совета для их решения нет, но точно повторить надо следующее: теория чисел (арифметика остатков, признаки делимости, деление с остатком, разложение на простые множители, НОК и НОД), теория множеств (круги Эйлера-Венна), разложение по разрядным слагаемым ($\overline{abc} = 100a + 10b + c$ и т.п.), среднее арифметическое (не путать со средней скоростью). Самыми главными навыками, необходимыми для решения этих задач, являются умение грамотно составлять уравнения по условию задачи и некоторый здравый смысл.

Задачи. В этом разделе будут собраны все те задачи из вступительных работ, которые нельзя отнести к задачам стандартного вида.
1. Делится ли число $\underbrace{11\ldots11}_{1998\text{ единиц}}$: а) на 3; б) на 2; в) на 6.
2. Делится ли число $\underbrace{22\ldots22}_{239\text{ двоек}}$: а) на 3; б) на 2; в) на 6.
3. НОД(a,b)=a. Чему равен НОК (a,b)?
4. НОК(a,b)=a. Чему равен НОД (a,b)?
5. В классе 35 учеников, из которых 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в кружке «Умелые руки», а 10 ребят в эти кружки не ходят. Сколько математиков занимаются в кружке «Умелые руки»?
6. В классе 37 учеников, из которых 19 занимаются в физическом кружке, 13 — в биологическом кружке, а 10 ребят в эти кружки не ходят. Сколько физиков занимаются в биологическом кружке?
7. Произведение двух последовательных чётных чисел на 120 меньше произведения двух следующих за ними чётных чисел. Найдите эти числа.
8. Произведение двух последовательных нечётных чисел на 144 меньше произведения двух следующих за ними нечётных чисел. Найти эти числа.
9. Существуют ли такие натуральные a и b, что $(a+b)(3a-b)=6$?
10. Существуют ли такие натуральные a и b, что $(a+b)(3a-b)=10$?
11. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 189?
12. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 180?
13. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размером 239×566?
14. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размером 239×366?
15. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь 9 окружностей?
16. Дана последовательность целых чисел: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3... Какое число будет на 366 месте? На каком месте в этой последовательности встретится число 366?
17. Дана последовательность целых чисел: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3... Какое число будет на 239 месте? На каком месте в этой последовательности встретится число 239?
18. Известно, что числитель дроби $\dfrac{5k^2+7k+11}{8k^2+6k+2}$ делится на 13. Докажите, что дробь можно сократить на 13.
19. Известно, что числитель дроби $\dfrac{3k^2+7k+1}{8k^2+4k+10}$ делится на 11. Докажите, что дробь можно сократить на 11.
20. Средний возраст одиннадцати игроков «Зенита» — 22 года. Во время матча один из игроков был удалён и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет удалённому футболисту?
21. Средний возраст одиннадцати игроков «Зенита» — 26 лет. Во время матча один из игроков был удалён и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 25 годам. Сколько лет удалённому футболисту?
22. Куплено несколько одинаковых книг и одинаковых тетрадей. За книги заплачено 1072 рубля.

Сколько куплено книг, если цена одной книги более чем на 100 рублей превосходит цену тетради, а книг куплено на 6 больше, чем тетрадей? Стоимость книг и тетрадей составляет целое число рублей.

23. Куплено несколько одинаковых книг и одинаковых тетрадей. За книги заплачен 1071 рубль. Сколько куплено книг, если цена одной книги более чем на 100 рублей превосходит цену тетради, а книг куплено на 5 больше, чем тетрадей? Стоимость книг и тетрадей составляет целое число рублей.

24. На складе имеются 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки разложили в два штабеля. Обозначим за S_1 и S_2 суммарные массы коробок в первом и втором штабеле соответственно, и пусть $A = |S_1 - S_2|$.

а) Найдите наименьшее возможное значение числа A, если в каждом штабеле находится 30 коробок.

б) Может ли A равняться нулю, если коробки распределены по штабелям не обязательно поровну?

25. На складе имеются 25 коробок массой 13 кг каждая и 19 коробок массой 29 кг каждая. Все эти коробки разложили в два штабеля. Обозначим за S_1 и S_2 суммарные массы коробок в первом и втором штабеле соответственно, и пусть $A = |S_1 - S_2|$.

а) Найдите наименьшее возможное значение числа A, если в каждом штабеле находится 22 коробки.

б) Может ли A равняться нулю, если коробки распределены по штабелям не обязательно поровну?

26. По кругу каким-то образом расставили все натуральные числа от 1 до 15 (каждое число встречается один раз). Для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 7? б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 8? Не забудьте объяснить свой ответ.

27. По кругу каким-то образом расставили все натуральные числа от 1 до 17 (каждое число встречается один раз). Для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 8? б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 9? Не забудьте объяснить свой ответ.

28. Назовём трёхзначное натуральное число *хорошим,* если оно кратно трём и первые две его цифры отличаются на единицу. Найдите количество хороших чисел, запись которых заканчивается на 7 или на 8.

29. Назовём трёхзначное натуральное число *интересным,* если оно кратно трём и первые две его цифры отличаются на два. Найдите количество интересных чисел, запись которых заканчивается на 6 или на 7.

30. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 700 кг каждая, 60 штук по 1000 кг каждая, 80 штук по 1500 кг каждая. Глыбы нельзя раскалывать. Считается, что глыбы можно погрузить в грузовик, если их общая масса не превосходит грузоподъёмности этого грузовика. а) Докажите, что все эти глыбы можно одновременно погрузить на 44 грузовика грузоподъёмностью 5 тонн каждый. б) Докажите, что все эти глыбы нельзя одновременно погрузить на 43 грузовика грузоподъёмностью 5 тонн каждый.

31. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг каждая, 60 штук по 1000 кг каждая, 60 штук по 1500 кг каждая. Глыбы нельзя раскалывать. Считается, что глыбы можно погрузить в грузовик, если их общая масса не превосходит грузоподъёмности этого грузовика. а) Докажите, что все эти глыбы можно одновременно погрузить на 39 грузовиков грузоподъёмностью 5 тонн каждый. б) Докажите, что все эти глыбы нельзя одновременно погрузить на 38 грузовиков грузоподъёмностью 5 тонн каждый.

32. При умножении двух натуральных чисел, одно из которых на 10 меньше другого, ученик ошибочно уменьшил цифру десятков произведения на 4. Для проверки ответа он поделил полученное неправильное произведение на меньший множитель и получил в частном 39, а в остатке 22. Какие числа он умножал?

33. При умножении двух натуральных чисел, одно из которых на 10 больше другого, ученик ошибочно уменьшил цифру десятков произведения на 6. Для проверки ответа он поделил полученное неправильное произведение на меньший множитель и получил в частном 49, а в остатке 22. Какие числа он умножал?

34. Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет по 3 пакетика, а коробок потребуется на 1 меньше. Какое наибольшее и наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?
35. Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет по 2 пакетика, а коробок потребуется на 1 больше. Какое наибольшее и наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?
36. У Васи есть мишень для игры в «Дартс», в которой есть два центральных сектора (синий и чёрный) и 20 наружных секторов, пронумерованных числами от 1 до 20. За попадание в синий центральный сектор игрок получает 25 очков, за попадание в чёрный центральный сектор — 50 очков. За попадание в наружный сектор игрок получает количество очков, равное номеру этого сектора, при этом в каждом из наружных секторов есть зоны удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Например, за попадание в сектор 7 (не в зоны удвоения или утроения) игрок получает 7 очков, за попадание в зону удвоения сектора 7 игрок получает 14 очков, а за попадание в зону утроения сектора 7 — 21 очко. В центральных секторах зон удвоения и утроения нет. Вася хочет за несколько бросков набрать ровно 881 очко. Какое наименьшее количество бросков ему потребуется для этого?
37. У Васи есть мишень для игры в «Дартс», в которой есть два центральных сектора (синий и чёрный) и 20 наружных секторов, пронумерованных числами от 1 до 20. За попадание в синий центральный сектор игрок получает 25 очков, за попадание в чёрный центральный сектор — 50 очков. За попадание в наружный сектор игрок получает количество очков, равное номеру этого сектора, при этом в каждом из наружных секторов есть зоны удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Например, за попадание в сектор 7 (не в зоны удвоения или утроения) игрок получает 7 очков, за попадание в зону удвоения сектора 7 игрок получает 14 очков, а за попадание в зону утроения сектора 7 — 21 очко. В центральных секторах зон удвоения и утроения нет. Вася хочет за несколько бросков набрать ровно 824 очка. Какое наименьшее количество бросков ему потребуется для этого?
38. Агата добиралась от дома до института на своём автомобиле с постоянной скоростью 100 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причём путь до дома занял у неё больше времени, чем путь до института.
а) Могла ли её средняя скорость за эти две поездки составить 90 км/ч?
б) Могла ли её средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?
39. Настя добиралась от дома до института на своём автомобиле с постоянной скоростью 80 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причём путь до дома занял у неё больше времени, чем путь до института.
а) Могла ли её средняя скорость за эти две поездки составить 70 км/ч?
б) Могла ли её средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?
40. В школе была проведена контрольная по математике для всех восьмиклассников. Треть всех участников и ещё 12 учеников получили двойки; четверть участников и ещё 18 учеников получили тройки, а некоторые даже получили четвёрки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?
41. В школе была проведена контрольная по математике для всех восьмиклассников. Треть всех участников и ещё 20 учеников получили двойки; четверть участников и ещё 30 учеников получили тройки, а некоторые даже получили четвёрки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?
42. Набор различных натуральных чисел будем называть хорошим, если этот набор можно разбить на две части так, что суммы чисел в каждой из этих частей равны друг другу.

а) Приведите пример хорошего набора, в котором нет числа 2.
б) Является ли хорошим набор $\{2,\ 3,\ 4,\ 10\}$?
в) Приведите пример хорошего набора, который можно разбить на части так, чтобы суммы чисел в этих частях были равны и сами эти части были хорошими.
43. На планете Омега некой далёкой галактики жители так же, как и земляне, умеют считать, знают такие же числа, но из известных на Земле операций над числами знают только умножение. А складывать, вычитать и делить они не умеют. Впрочем, у них есть своя операция «галочка», $\vee$. Про эту операцию известно, что 1) $x \vee x = 1$ и 2) $(x \vee y) \cdot z = x \cdot (z \vee y)$. Вычислите $18 \vee 3$.
44. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.
а) Может ли доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
45. Найдите количество натуральных трёхзначных чисел, которые одновременно делятся на 3, на 4 и на 5.
46. Сократите дробь $\dfrac{x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}$.
47. Антон ввёл новую операцию $\#$, такую, что $x\#y = 2x + y$. Найдите $2\#(3\#4)$.
48. Назовём натуральное число *счастливым,* если его сумма цифр равна 30. Найдите наименьшее счастливое число.
49. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{n+1}{n-4}$, где n — натуральное число.
50. В числе $2^{30} \cdot 5^7$ стёрли все нули. Найдите его самую правую цифру.
51. Белоснежка хочет связать подарок на Новый год всем семи гномам и принцу. Она умеет вязать одноцветные носки, свитер и жилетку, причём у неё есть нитки трёх цветов — красного, синего и зелёного.

Белоснежка связала по одному изделию каждого цвета так, что у неё получилось 9 подарков. Один она решила оставить себе, причём ей не важно, то и какого цвета это будет, однако гномам и принцу она хочет угодить. Белоснежка знает, что:
1. Принц хотел бы или зелёную жилетку, или синие носки.
2. Умник любит только синий, но он не любит свитеры.
3. Скромник хотел бы жилетку.
4. Простачок хотел бы или жилетку, или свитер синего цвета.
5. Чихун и Весельчак хотят одежду одного цвета, причём не любят красный.
6. Соня не хотел бы иметь в качестве подарка красные носки.
7. Весельчак не хочет свитер.
8. Ворчуну невозможно угодить, можно подарить что останется.

После того, как она распределила подарки, оказалось, что ей досталась зелёная жилетка. Кто какой подарок получит на Новый год?
52. Выписали все числа от 300 до 1100. Сколько раз написали цифру 4?
53. Найти сумму $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\ldots+\dfrac{1}{n^2-1}$ для каждого натурального n, большего 3.
54. Является ли число 3^{4^5} точным квадратом?
55. Найдите наименьшее натуральное число, большее 2, остатки от деления которого на 3 и на 23 равны 2.
56. Сравните $633^{3^{72}}$ и $632^{4^{54}}$.
57. При каких натуральных n дробь $\dfrac{4n-23}{n-2}$ является натуральным числом?
58. Дан прямоугольник 3×4 клетки. Можно ли расставить числа 3 и -3 в его клетки так, чтобы все 7 сумм (по строкам и по столбцам) были различны?
59. Укажите какое-либо целое число b такое, что число $b^2 + 3b + 2004$ является точным квадратом.
60. Расположите 6 точек на 4 отрезках, не лежащих на одной прямой, так, чтобы каждому отрезку

принадлежало ровно 3 точки.
61. Разрежьте по клеточкам квадрат 6×6 на восемь прямоугольников, среди которых нет одинаковых.
62. Найдите сумму утроенного наибольшего общего делителя и половины наименьшего общего кратного чисел 72, 80, 96.
63. Найти все трёхзначные числа, делящиеся на 15, сумма первой и третьей цифры у которых равна 7.
64. Найти $\left(\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \ldots + 10 \cdot 20 \cdot 40}{1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 10 + \ldots + 10 \cdot 40 \cdot 50}\right)^2$.
65. Найти последнюю цифру числа $11^{50} + 9^{35} - 2^{15}$.
66. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее, чем в три раза?
67. Учащимся школы раздали тетради так, что учащиеся одного класса получили равные количества тетрадей, а учащиеся разных классов — разные. Известно, что 12 девятиклассников и 5 пятиклассников получили вместе 120 тетрадей. Сколько тетрадей получил каждый из этих учащихся?
68. Сумма трёх различных целых положительных чисел равна 80. Какое наибольшее значение может принять сумма трёх их попарных разностей? В каждой разности из большего числа вычитается меньшее. Обоснуйте свой ответ.
69. Если перемножить цифры некоторого натурального числа на само число, то получится 10472. Найдите все числа, обладающие таким свойством. Ответ обоснуйте.
70. В устройстве памяти хранятся данные, занимающие ровно 500 байт. Контроллер, управляющий памятью, позволяет или записать в память сообщение длиной 198 байт, или считать сообщение длиной 300 байт и удалить его. Какой минимальный объём памяти может быть занят в этом устройстве? Можно ли полностью очистить память? Ответ обоснуйте.
71. Найдите нечётное простое число n, такое, что $8^7 + 2^{19} + 4^9$ делится на n.
72. Найти какое-либо натуральное число, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6 даёт остаток 1, если на 7 это число делится нацело.
73. Докажите, что число $1000^{1000} - 1$ является составным. Укажите не менее пяти его делителей.
74. Докажите, что сумма квадратов трёх последовательных целых чисел при делении на 3 даёт остаток 2.
75. Натуральное число n при делении на 7 даёт в остатке 3. Какой остаток при делении на 7 будет давать число $n^2 + 2n$?
76. 90 одинаковых ластиков стоят 156 рублей с копейками. Найдите стоимость одного такого ластика.
77. Найдите наименьшее целое, не равное нулю, число T, для которого число $12960 \times T$ является квадратом целого числа.
78. Найдите все такие двузначные числа, что при перестановке цифр в каждом из них этого число: а) увеличивается на 9; б) уменьшается на 63.
79. Число получено перемножением всех чисел $93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 162$. Определите: а) самый большой простой делитель этого числа;
б) наибольшую степень числа 5, на которую делится данное число;
в) 15 последних цифр в десятичной записи этого числа.
Ответы обоснуйте.
80. Найдите последнюю цифру числа $1567^{2008} + 2010^{2009}$.
81. Таня, Коля, Серёжа и Вика отправились на рыбалку. На рыбалке каждому удалось поймать по одной рыбе, и домой они принесли окуня, щуку, плотву и леща. Серёжа точно не мог поймать щуку, так как он боится их больше всего на свете. Вика поймала одну из хищных рыб (щуку или окуня). Кто кого мог поймать, если Таня поймала окуня?
82. Толя, Катя, Семён и Вася отправились на рыбалку. На рыбалке каждому удалось поймать по одной рыбе, и домой они принесли окуня, щуку, плотву и леща. Катя точно не могла поймать плотву, потому что она боится красноглазых рыб (остальные рыбы не красноглазые). Семён поймал одну из

хищных рыб (щуку или окуня). Кто кого мог поймать, если Вася поймал леща?
83. Вовочка получил единицу. Сколько пятёрок подряд надо ему получить, чтобы его средний балл стал равен 4,5?
84. Известно, что среди трёх следующих утверждений есть верное: а) за 4 одинаковых фломастера заплатили 15 р. 86 к. б) за 6 таких же фломастеров заплатили 14 р. 58 к. в) за 8 таких фломастеров заплатили 18 р. 68 к. Какое наибольшее число таких фломастеров можно купить, имея 50 рублей?
85. Какие из следующих утверждений верны? Ответ **кратко** обосновать.
а) Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его сторон.
б) $8^7 - 2^{18}$ делится на 7.
в) Если сторона и три угла одного треугольника равны стороне и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
86. Числа от 1 до 37 записаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — число 1?
87. Каково наименьшее натуральное n такое, что $n!$ делится на 990?
88. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 30$. Вася обводит числа на доске по три штуки так, чтобы суммы всех обведённых групп были различны и не превосходили 35. Какое наибольшее количество групп он может обвести?
89. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 40$. Вася обводит числа на доске по три штуки так, чтобы суммы всех обведённых групп были различны и не превосходили 42. Какое наибольшее количество групп он может обвести?

2.9 Геометрия

В седьмом классе ученики только начинают знакомство с геометрией, поэтому фактов, помогающих решить задачу, не так много. Здесь мы соберём их все.

Углы. Про углы необходимо знать следующие факты:
1. Вертикальные углы равны.
2. Смежные углы дают в сумме $180°$.
3. Внешний угол треугольника (смежный к его внутреннему) равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.
4. Сумма углов треугольника равна $180°$, а четырёхугольника — $360°$. Вообще говоря, сумма углов любого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, а суммы его внешних углов — $360°$.
5. Накрест лежащие и соответственные углы при параллельных равны, односторонние дают в сумме $180°$.

Треугольники. Приведём некоторые факты про треугольники, которые помогают решить задачу.
1. Признаки равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трём сторонам.
2. Равнобедренные треугольники: углы при основании равны, биссектриса, медиана и высота, проведённые из вершины, совпадают.
3. Равносторонние треугольники: все углы равны $60°$, все высоты, медианы и биссектрисы, проведённые из одной вершины, совпадают.
3. Прямоугольные треугольники: специальный признак равенства по катету и гипотенузе и являющиеся следствиями обыкновенных признаков равенства признаки по гипотенузе и острому углу и по катету и острому углу. Также очень часто используются следующие факты: катет, лежащий напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы и наоборот: если катет равен половине гипотенузы, то напротив него находится угол $30°$, а также что медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы и если медиана равна половине стороны, то она проведена из прямого угла.
4. Неравенство треугольника: сумма любых двух сторон строго больше третьей.
5. Напротив большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

Как решать. Можно выделить некоторые методы, которые встречаются наиболее часто.
1. Подсчёт углов. Если известны некоторые углы, то известны и смежные к ним, также можно найти углы при помощи того, что сумма углов треугольника равна $180°$. Также можно обозначить некоторые углы буквами и выразить остальные углы через них, а потом воспользоваться тем, что сумма углов треугольника равна $180°$, тем самым составляя уравнение для нахождения неизвестного угла. Этот метод хорошо работает, когда в задаче можно найти равнобедренные треугольники и параллельные прямые (в обоих случаях есть равные углы).
2. Поиск равных треугольников. У равных треугольников равны все элементы (углы, стороны), что помогает увеличить количество известных элементов в задаче.
3. Поиск прямоугольных треугольников с углом $30°$. Если найден такой треугольник, в нём можно либо сразу найти сторону, либо обозначить катет буквой x и выразить через него гипотенузу.
4. Если в задаче требуется сконструировать треугольник, надо обязательно проверить, чтобы для него выполнялось неравенство треугольника.
5. Надо тренироваться рисовать большие красивые чертежи. Хороший чертёж — уже половина решения.

Задачи. Изредка в задачах встречается также тема **построение циркулем и линейкой,** но в самых массовых олимпиадах такие задачи обычно не встречаются, да и не в каждой школе её изучают. Тем не менее, с ней можно ознакомиться в учебнике Атанасяна.

1. Доказать, что если медиана треугольника является высотой, то треугольник равнобедренный.

2. Доказать, что если высота треугольника является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

3. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, причём $AD = DB = DC$, $DE \parallel BC$. Доказать, что $DE \perp AC$.

4. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены точки D и E так, что $AD = DE$ и $DE \parallel AC$. Доказать, что $AE \perp BC$.

5. В четырёхугольнике $PRNL$ ($PR \parallel NL$) на стороне PR взята точка M, а на стороне NL — точка K. Оказалось, что MN — биссектриса угла RMK, а ML — биссектриса угла PMK. Найдите длину LN, если $MK = 5$.

6. В четырёхугольнике $STGQ$ ($ST \parallel GQ$) на стороне ST взята точка M, а на стороне GQ — точка K. Оказалось, что MG — биссектриса угла TMK, а MQ — биссектриса угла SMK. Найти длину MK, если $GQ = 12$.

7. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше, чем половина периметра этого четырёхугольника.

8. В треугольнике из двух различных вершин проведены отрезки, соединяющие эти вершины с точками на противоположных сторонах. Доказать, что сумма длин этих отрезков меньше периметра треугольника.

9. Доказать, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $AE = A_1E_1$, где E и E_1 — середины медиан BD и B_1D_1 соответственно.

10. Доказать, что если треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равны, то $ME = M_1E_1$, где E и E_1 — середины высот PH и P_1H_1 соответственно.

11. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка D так, что ΔACD равносторонний. Докажите, что ΔBCD равнобедренный.

12. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка D так, что ΔBCD равнобедренный с углом $120°$. Докажите, что ΔACD равносторонний.

13. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), $\angle B = 24°$. CP — биссектриса треугольника, $PK \parallel BC$ (точка K лежит на стороне AC). Найдите угол $\angle KPC$.

14. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), $\angle C = 72°$. AP — биссектриса треугольника, $PK \parallel AB$ (точка K лежит на стороне AC). Найдите угол $\angle KPA$.

15. Существует ли равнобедренный треугольник, в котором биссектриса одного из углов равна одной из сторон треугольника? (Не забудьте доказать полученный Вами ответ).

16. В равнобедренном треугольнике биссектриса одного из углов равна одной из сторон треугольника. Верно ли, что этот треугольник — прямоугольный? (Не забудьте доказать полученный Вами ответ).

17. В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 17 см. Найдите основание треугольника.

18. В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$, а основание треугольника равно 10 см. Найдите высоту, проведённую к боковой стороне.

19. Можно ли два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами расположить так, чтобы один лежал внутри другого?

20. Можно ли треугольник, две стороны которого равны 566 и 566, поместить в треугольник, две стороны которого равны 239 и 566?

21. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC и углом B, равным 60°, проведена высота AD. Найдите DC, если $DB = 2$см.

22. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC, равной 12 см, проведена высота BD. Найдите CD и DA, если угол $\angle A = 30°$.

23. Сколько существует неравных между собой равнобедренных треугольников со стороной 5см и

углом $30°$?

24. Сколько существует неравных между собой равнобедренных треугольников со стороной 5см и углом $60°$?

25. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC угол A равен $60°$, $BC = 6$см. AL — биссектриса треугольника ABC. Найдите высоту LH треугольника ALC.

26. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC угол A равен $60°$. Через середину M отрезка AC проведён перпендикуляр к нему, пересекающий прямую BA в точке T. $BC = 3$см. Найдите MT.

27. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно $48°$ и $76°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C.

28. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно $64°$ и $24°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины A.

29. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна стороне AC. Найти угол BAC, если $AB = 2AC$.

30. В треугольнике ABC медиана AM составляет со стороной AB угол $30°$. Найти угол BAC, если $AB = 2AC$.

31. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC$. Лучи BA и CD пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Известно, что $BE = BF$ и $\angle DEF = 25°$. Найдите $\angle EFD$.

32. В четырёхугольнике $KLMN$ $NK = LK$. Лучи KL и NM пересекаются в точке P, а лучи LM и KN — в точке Q. Известно, что $KP = KQ$ и $\angle MPQ = 28°$. Найдите $\angle PQM$.

33. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $30°$. Докажите, что в этом треугольнике отрезок серединного перпендикуляра, проведённого к гипотенузе до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

34. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $60°$. Через середину гипотенузы проведён перпендикуляр до пересечения с катетом. Докажите, что больший катет втрое больше длины построенного перпендикуляра.

35. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен $130°$.

36. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если две его стороны равны 6см и 10см.

37. В треугольнике ABC угол A равен $40°$, угол B равен $20°$, а $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

38. В треугольнике MNP угол M равен $40°$, угол N равен $20°$, а $MN - NP = 8$. Найдите длину биссектрисы угла P.

39. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен $60°$. Найдите, в каком отношении биссектриса BL делит высоту AH.

40. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC угол A равен $60°$, $BC = 6$см. AL — биссектриса треугольника ABC. Найдите высоту LH треугольника ALC.

41. Можно ли какой-либо прямоугольный треугольник разрезать на два треугольника, один из которых равносторонний, а другой равнобедренный?

42. Может ли одна из биссектрис треугольника делить другую биссектрису пополам?

43. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 4 см, а острый угол — $30°$. Высота, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка. Найдите длины этих отрезков.

44. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 6 см, а острый угол — $30°$. Высота, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка. Найдите длины этих отрезков.

45. Два угла равнобедренного треугольника пропорциональны числам 5 и 2. Найдите угол между биссектрисами неравных углов.

46. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC в 2 раза больше стороны AB. на продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F. Пусть E — середина стороны AD, $\angle DFC = 30°$. Найдите $\angle EBF$.

47. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 2AB$. На стороне BC отмечена точка M так, что MA — биссектриса $\angle BMD$. Найдите $\angle BMA$.

48. Внешний угол при вершине B прямоугольного треугольника ABC равен $120°$, биссектриса угла $\angle ABC$ равна 2 см. Найдите длину стороны AC, если известно, что $\angle C = 90°$.
49. Внешний угол при вершине B прямоугольного треугольника ABC равен $150°$, биссектриса острого угла A равна 3 см. Найдите длину стороны CB.
50. На стороне CB прямоугольного треугольника ABC взята точка P, а на гипотенузе AB взята точка S. При этом $\angle B = 35°$, $\angle SCB = 20°$, $\angle BAP = 10°$. Докажите, что треугольники ACP и ACS равнобедренные.
51. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ взята точка E. При этом $CB \perp BA$, $DE \perp BA$. Диагональ AC пересекает отрезок DE в точке M. Известно, что $\angle BCE = 40°$, $\angle EMA = 65°$, $\angle EDA = 45°$. Докажите, что треугольники CEA и CED равнобедренные.
52. Какие-то две стороны равнобедренного треугольника отличаются на 8 см, а какие-то две составляют в сумме 20 см. Определите все значения, которые может принимать длина основания такого треугольника.
53. Какие-то две стороны равнобедренного треугольника составляют в сумме 16 см, а какие-то две отличаются на 6 см. Определите все значения, которые может принимать длина основания такого треугольника.
54. В прямоугольном треугольнике ABC с углом A, равным $30°$, к гипотенузе AC проведена высота BH. На стороне BC выбрана точка K так, что $KC = HC$. Лучи AB и HK пересекаются в точке N. Найдите отношение отрезков AH и KN.
55. В прямоугольном треугольнике ABC с углом B, равным $30°$, к гипотенузе AB проведена высота CH. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка K так, что $KC = HC$. Отрезки AC и HK пересекаются в точке M. Найдите отношение отрезков BH и KM.
56. Биссектриса внешнего угла ABD треугольника ABC пересекает биссектрису угла ACB в точке K, $\angle CKB = 19°$. Найдите $\angle BAC$.
57. Биссектриса внешнего угла ACD треугольника ABC пересекает биссектрису угла ABC в точке M, $\angle BAC = 52°$. Найдите $\angle BMC$.
58. Равные отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине E, $AD = CE$. прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к DE, пересекает отрезок BD в точке M. Докажите, что расстояние от точки M до прямой BC в два раза меньше длины отрезка MD.
59. Равные отрезки AD и BC пересекаются в их общей середине E, $AB = DE$. прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к BE, пересекает луч CD в точке K. Докажите, что расстояние от точки D до прямой KE в четыре раза меньше длины отрезка KC.
60. Точки B и O расположены по разные стороны от прямой AC, при этом $OA = OB = OC$ и $\angle AOB = 52°$. Найдите $\angle ACB$.
61. Точки A и O расположены по разные стороны от прямой BC, при этом $OA = OB = OC$ и $\angle ACB = 17°$. Найдите $\angle AOB$.
62. Через вершину B треугольника ABC провели прямую l, параллельную AC. Биссектриса угла $\angle BCA$ пересекает прямую l в точке D. Точка K такова, что B — середина DK. Докажите, что ΔCDK — прямоугольный.
63. В треугольнике ABC провели медиану BD. Нашлась такая точка K, что $BK \parallel AC$ и $\angle KBA = \angle ABD$. Докажите, что ΔABC — прямоугольный.
64. На стороне BC треугольника ABC расположены точки P и K так, что $AP = BP$ и $KC = AK$. При этом оказалось, что величина угла PAK равна $30°$. Найдите угол BAC.
65. На стороне PC треугольника PKC расположены точки A и B так, что $AP = AK$ и $KB = BC$. При этом оказалось, что величина угла AKB равна $40°$. Найдите угол PKC.
66. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, угол A равен $120°$. Из вершины B проведена высота BH, при этом оказалось, что $HC =$1дм 2 см. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.
67. Из вершины K треугольника PTK проведена высота KH, при этом оказалось, что $HP =$2дм 1см. Найдите расстояние от точки T до прямой PK, если известно, что угол K равен $30°$, угол T равен $120°$.

68. Из отрезков длиной 3, 5, 6, 11 составили четырёхугольник, одна из диагоналей которого имеет целую длину. Чему может быть равна эта длина?
69. Точка K лежит на отрезке AB, а точка M — на отрезке BC. Отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что $\angle ABC = 37^\circ$, $\angle BAM : \angle CAM = 4 : 7$, $\angle ACK : \angle BCK = 7 : 4$. Найдите величину угла APC.
70. Точка M лежит на отрезке AC, а точка P — на отрезке BC. Отрезки AP и BM пересекаются в точке K. Оказалось, что $\angle ACB = 26^\circ$, $\angle CAP : \angle BAP = 5 : 6$, $\angle ABM : \angle CBM = 6 : 5$. Найдите величину угла AKB.
71. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC, в котором $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB отмечена такая точка D, что $AD = BC$. Пусть DP — высота треугольника MBD. Докажите, что удвоенный периметр треугольника MDP больше периметра треугольника MDB.
72. Точка D — середина стороны AB треугольника ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечена такая точка M, что $BM = AC$. Пусть MK — высота треугольника MCD. Докажите, что удвоенный периметр треугольника MDK больше периметра треугольника MDC.
73. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник MAB, причём точка M лежит вне квадрата. Найдите углы треугольника DMC.
74. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник NAB, причём точка N лежит внутри квадрата. Найдите углы треугольника DNC.
75. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведённая из вершины прямого угла.
76. Острый угол прямоугольного треугольника равен 60°. Высота к гипотенузе делит её на два отрезка, длина большего из которых равна 12. Найдите длину гипотенузы.
77. Четырёхугольник $ABCD$ называется дельтоидом, если в нём $BA = AD$ и $BC = CD$. Докажите, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.
78. В треугольнике ABC угол B равен 90°, CC_1 — биссектриса, $CC_1 = 16$ см, $BC_1 = 8$ см. Найдите внешний угол при вершине A.
79. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, проведена высота CD, $BC = 2BD$. Найдите AD, если $BC = 4$.
80. В треугольнике KLM известно, что $KM < ML < LK$. Укажите наибольший угол треугольника.
81. Найдите градусные меры трёх углов треугольника, если два его внешних угла равны соответственно 80° и 115°.
82. На сколько частей делят плоскость четыре прямые, являющиеся продолжениями сторон четырёхугольника, никакие две стороны которого не параллельны?
83. Две стороны треугольника равны 2 см и 6 см. Третья сторона выражается целым числом сантиметров. Какой может быть её длина? Выпишите все возможные варианты.
84. В прямоугольном треугольнике KLM с углами $\angle M = 90^\circ$ и $\angle K = 60^\circ$ проведена высота MH, причём $KH = 6$. Найдите длину LH.
85. В треугольнике ABC угол B — прямой, BD — высота, BC в два раза больше DC. Найти отношение длин отрезков DC и AD.
86. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к меньшей из них.
87. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle C = 72^\circ$, AP — биссектриса, $PK \parallel AB$, PK пересекает сторону AC в точке K. Найдите $\angle KPA$.
88. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, при этом $\angle AMB = 120^\circ$. Найдите $\angle C$.
89. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, точка E лежит на стороне BC, причём $BE = EC$. Точка E делит периметр треугольника ABC (считая от вершины A) на две части, из которых одна больше другой на 2. Найдите AB.
90. Как с помощью циркуля и линейки разделить угол в 54° на три равные части?
91. В треугольнике ABC угол A равен 70°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Угол AOC равен 115°. Найдите углы B и C треугольника ABC, а также углы AOB и BOC.

92. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке O, угол $AOB = 70°$. Найдите углы треугольника ABC.
93. Длина отрезка BC равна 8. Точка A лежит на прямой BC, но не принадлежит отрезку BC, причём $5AB = AC$. Точка D принадлежит отрезку BC и $4DC = BC$. Найдите длину отрезка AD.
94. На сторонах угла A, равного $127°$, отмечены точки B и C, а внутри угла — точка D так, что $\angle ABD = 25°$, $\angle ACD = 19°$. На луче BD отмечена точка P так, что точка D лежит между точками B и P. Найдите угол PDC.
95. В треугольнике ABC высоты AH и BP равны между собой, угол ABP равен углу CAH. Найдите углы треугольника.
96. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 2$. На прямой, содержащей медиану CM, отложен отрезок MK, равный CM. Найдите $\angle ABK$.
97. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Найти углы треугольника AOB_1, если один из углов треугольника ABC на $30°$ больше другого. Рассмотреть не менее двух случаев.
98. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит медиану, проведённую из другого угла при основании, пополам. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 20 см.
99. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B = 2 : 5$, $\angle B : \angle C = 5 : 11$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины меньшего угла.
100. В треугольнике ABC угол B равен $100°$. На луче CA отмечена точка M так, что $MA = AB$, и точка A находится между точками M и C. На луче AC отмечена точка N так, что $CN = BC$, и точка C находится между точками A и N. Найдите градусную меру угла MBN.
101. В треугольнике ABC $AB = BC$, точка T — середина стороны AB, точка H — середина стороны BC, отрезок TP перпендикулярен к стороне AB, отрезок KH перпендикулярен к стороне BC (точки P и K лежат на стороне AC), $\angle ABC = 120°$, $AC = 21$ см. Найдите длину отрезка PK.
102. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.
103. Дан треугольник ABC с углами $30°$, $70°$ и $80°$ соответственно. Внутри треугольника взята точка O, такая, что треугольники AOB, AOC и BOC являются равнобедренными с общей вершиной O. Найдите углы этих равнобедренных треугольников.
104. Треугольник PQR — прямоугольный ($\angle R = 90°$), $\angle PQR = 60°$, $QR = 6,5$. Через точку Q проведена прямая, параллельная прямой PR и на ней взята точка S так, что $PR = QS$.
а) Между какими целыми числами лежит длина отрезка QS?
б) Найдите углы треугольника ROS, если RO — биссектриса треугольника QRS.
105. Треугольник KLM — прямоугольный ($\angle M = 90°$), $\angle KLM = 60°$, $QR = 8,5$. Через точку L проведена прямая, параллельная прямой KM и на ней взята точка N так, что $KM = LN$.
а) Между какими целыми числами лежит длина отрезка LN?
б) Найдите углы треугольника MON, если MO — биссектриса треугольника LMN.
106. BM — медиана в треугольнике ABC, MD — биссектриса угла AMB, ME — биссектриса угла BMC. Найдите угол DME.
107. Биссектриса угла при вершине треугольника пересекает основание под углом $73°$, а биссектрису одного из углов при основании под углом $58°$. Найдите углы треугольника.
108. Биссектриса угла при вершине треугольника пересекает основание под углом $71°$, а биссектрису одного из углов при основании под углом $57°$. Найдите углы треугольника.
109. В ΔKHM $KH = 12$, $HM = 9$, $MK = 18$. Через точку A, лежащую на стороне HM, проведён перпендикуляр к биссектрисе $\angle M$, пересекающий сторону KM в точке C, и перпендикуляр к биссектрисе $\angle H$, пересекающий сторону KH в точке B. В каком отношении точка A делит сторону

HM, если $KC = 2KB$?

110. В ΔKHM $KH = 12$, $HM = 7$, $MK = 17$. Через точку A, лежащую на стороне HK, проведён перпендикуляр к биссектрисе $\angle K$, пересекающий сторону KM в точке B, и перпендикуляр к биссектрисе $\angle H$, пересекающий сторону MH в точке C. В каком отношении точка A делит сторону HK, если $MC = 0,5MB$?

111. Четырёхугольник $ABCD$ называется дельтоидом, если в нём $AB = BC$ и $AD = DC$. Докажите, что точка O пересечения диагоналей дельтоида является серединой одной из его диагоналей.

112. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка C расположена вдвое дальше от одной из точек A и B, чем от другой. Найдите AB, если $AC = 18$.

113. В треугольнике ABC $\angle A = 40°, \angle C = 90°$. Определите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины угла C.

114. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник ABC по его стороне a, сумме сторон $b + c$ и высоте, проведённой к стороне c.

115. В ΔSPM : мера угла P равна $90°$, мера угла M равна $60°$, ST — биссектриса ΔSPM, $|PT| = 26$, TF — высота ΔTSM. Найдите $|TF|$.

116. В ΔMNK : $|MN| = |NK| = |MK|$, $|MN| = 13$, P — середина $|MK|$, $R \in [NK]$, $(PR) \perp (NK)$. Найдите $|KR|$.

117. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, а в треугольнике ADC — биссектриса DE. Оказалось, что $\angle ABD = 43°$, а $DE = CD$. Найдите $\angle BAC$.

118. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE, а в треугольнике BAE — биссектриса ED. Оказалось, что $\angle ECB = 22°$, а $ED = AE$. Найдите $\angle ABC$.

119. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка D на стороне BC такова, что $\angle BMA = \angle DMC$. Оказалось, что $CD + DM = BM$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$.

120. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что сторона DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

121. Возможно ли, чтобы медианы острых углов прямоугольного треугольника были перпендикулярны? Приведите пример такого треугольника или докажите, что его не существует.

3 8 класс

Вступительная работа в 9 класс содержит в два раза больше заданий (порядка 20), но и времени на выполнение даётся больше, 180 минут. Тем не менее, эту работу выполнить полностью значительно сложнее, чем вступительную в 8 класс, так что в данном случае надо стараться решить задачи по тем темам, в которых разбираешься хорошо. Перед изучением программы для 8 класса рекомендуется сначала убедиться, что хорошо усвоена программа для 7 класса.

3.1 Числовые выражения

Во вступительных работах в 9 класс могут встретиться и действия с дробями, и применение распределительного закона, и действия со степенными функциями. Обо всём этом можно прочитать в соответствующем разделе для 7 класса.

Корень. Главное новшество в вычислительных задачах в 8 классе — это появление квадратного корня. Выпишем несколько его полезных свойств:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Первые два свойства интуитивно понятны, а вот невнимательность к третьему свойству нередко приводит к ошибкам. Всем понятно, что $\sqrt{5^2} = 5$. Чуть менее понятно, что также и $\sqrt{(-5)^2} = 5$, так как значение корня просто по определению число всегда неотрицательное. И, наконец, наибольшее количество ошибок вызывают выражения вида $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$. Многие решающие пишут, что $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3}-2$, но это неверно, так как $\sqrt{3} < 2$, а значит $\sqrt{3}-2 < 0$! На самом деле $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2-\sqrt{3}$.

Также следует обратить внимание, что корень из суммы (разности) НЕ равен сумме (разности) корней! Абитуриенты, делающие преобразования вида $\sqrt{x \pm y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ как правило во второй тур не проходят.

Интерес представляют выражения вида $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$ и способы избавления в них от внешнего корня.

Первый способ. Понятно, что выражение $a \pm b\sqrt{c}$ с большой вероятностью может получиться в результате возведения в квадрат выражения подобного вида. Например, рассмотрим выражение $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$. Попробуем представить подкоренное выражение в виде $(x-y\sqrt{7})^2$. Раскроем скобки: $(x-y\sqrt{7})^2 = x^2-2xy\sqrt{7}+7y^2 = x^2+7y^2-2xy\sqrt{7}$. Отсюда понятно, что $x^2+7y^2 = 16, 2xy = 6$. Подбором легко находятся $x = 3$, $y = 1$, откуда $\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(3-\sqrt{7})^2} = |3-\sqrt{7}| = 3-\sqrt{7}$.

Второй способ. Как видно из разбора предыдущего способа, он работает только в том случае, если коэффициент при квадратном корне чётен. Если же он нечётен, то его надо сделать чётным! Пример: $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Да, корень не исчез совсем, но выражение стало значительно проще.

Третий способ. Третий способ нужен, если не работают первые два и под корнем стоит **составное** число. Он необходим, если выражение появилось в результате возведения в квадрат выражения с двумя разными корнями и основан также на приведении к формулам квадрата суммы или квадрата разности. Пример: $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Ещё одной классической задачей с корнем является избавление от иррациональности в знаменателе. Для её решения необходимо домножить дробь на выражение, сопряжённое знаменателю. Сопряжённым для выражения будем называть то, которое при перемножении с ним образует формулу разности квадратов, которая поможет избавиться от корней. Пример:

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}.$$

Сравнение чисел. Чтобы сравнить два выражения, содержащих корни, надо возвести эти выражения в квадрат и упростить. При этом надо проследить, чтобы возводимые выражения были неотрицательными, иначе знак неравенства поменяется. В процессе сравнения можно делать все те же действия, что и при решении неравенств: перенос слагаемых из одной части в другую, домножение и деление на положительное число.

Задачи. Приведённые задачи могут и не содержать корней, тогда их следует решать методами, описанными в разделе для 7 класса. Во всех задачах задание вычислить или упростить, если не указано другое.

1. $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right) : \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + \frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$,
2. $\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{5}}-2\sqrt{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 4\sqrt{10} + \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{2}}$,
3. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,
4. $\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$,
5. $2\sqrt{8\frac{1}{2}}-\sqrt{306}+5\sqrt{1\frac{9}{25}}$,
6. $4\sqrt{10\frac{1}{2}}+\sqrt{168}-15\sqrt{1\frac{17}{25}}$,
7. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$,
8. $\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{8-2\sqrt{7}}$,
9. $\frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{20}}+1}-\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{20}}-1}$,
10. $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{12}}+1}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{12}}-1}$,
11. $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{24}\right)\cdot 8-\frac{1}{3}}{1,85-1,62:0,9}$,
12. $\frac{\left(1\frac{2}{9}:7\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0,23}{2\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}$,
13. $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$,
14. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$,
15. $3458\frac{239}{9876}\cdot 3457\frac{239}{9876}-3459\frac{239}{9876}\cdot 3456\frac{239}{9876}$,
16. $4359\frac{239}{9876}\cdot 4356\frac{239}{9876}-4358\frac{239}{9876}\cdot 4357\frac{239}{9876}$,
17. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,
18. $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$,
19. Сравнить числа $a=\sqrt{7-3\sqrt{5}}$ и $b=\frac{2}{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}$,
20. Сравнить числа $a=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ и $b=\frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$,
21. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$,
22. $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$,
23. $131\cdot 139-133\cdot 137$,
24. $141\cdot 149-143\cdot 147$,
25. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$,
26. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,
27. $5379^2-5378\cdot 5380$,
28. $9552\cdot 9550-9551^2$,

29. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}-\sqrt{2}$,

30. $\sqrt{21-8\sqrt{5}}+\sqrt{5}$,

31. $\dfrac{5,1}{0,017}+\dfrac{0,09}{0,003}+\dfrac{1}{0,1}$,

32. $\dfrac{2,4}{0,08}+\dfrac{0,21}{0,07}+\dfrac{4}{0,4}$,

33. Сравнить числа $a=4+2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{11}+\sqrt{13}$,

34. Сравнить числа $a=3+2\sqrt{5}$, $b=\sqrt{14}+\sqrt{15}$,

35. $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{\sqrt{17}+2}\sqrt{\sqrt{17}-2}}$,

36. $562\cdot 570-568\cdot 564$,

37. $\dfrac{15^{n+4}}{3^{n+2}\cdot 5^{n+3}}$,

38. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}\cdot\dfrac{\sqrt{63\cdot 16-72\cdot 6}}{\sqrt{19^2-17^2}}$,

39. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}\cdot\dfrac{\sqrt{36\cdot 92-48\cdot 9}}{\sqrt{21^2-19^2}}$,

40. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}\cdot\dfrac{\sqrt{225\cdot 32-72\cdot 16}}{\sqrt{23^2-19^2}}$,

41. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}\cdot\dfrac{\sqrt{126\cdot 32+48\cdot 18}}{\sqrt{19^2-15^2}}$,

42. $\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}+\sqrt{3}$,

43. $-\sqrt{5}-\sqrt{1-2\sqrt{5}+5}$,

44. $-\sqrt{3}-\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}$,

45. $\sqrt{5}+\sqrt{1-2\sqrt{5}+5}$,

46. $\sqrt{83-18\sqrt{2}}-\sqrt{2}$,

47. $\sqrt{54-14\sqrt{5}}+\sqrt{5}$,

48. $(2-\sqrt{5})(\sqrt{9+4\sqrt{5}})$,

49. $(2-\sqrt{7})(\sqrt{11+4\sqrt{7}})$,

50. $\dfrac{180\cdot 3,91-168+859\cdot 1,8-768}{239\frac{5}{6}-237\frac{2}{3}}$,

51. $\dfrac{1,7\cdot 229-1155+7,91\cdot 170+937}{366\frac{5}{6}-364\frac{29}{42}}$,

52. $\dfrac{(8^{2020}+8^{2019})^2}{(4^{2019}-4^{2018})^3}$,

53. $\dfrac{(4^{3021}-4^{3020})^3}{(8^{3020}+8^{3019})^2}$,

54. $\left(30\dfrac{1}{239}\right)^2-31\dfrac{1}{239}\cdot 29\dfrac{1}{239}$,

55. $(2-\sqrt{5})\sqrt{18+8\sqrt{5}}$,

56. $\dfrac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$,

57. $\dfrac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$,

58. Сравните числа $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $2\sqrt{2}$,

59. Сравните числа $\sqrt{10}+\sqrt{13}$ и $\sqrt{12}+\sqrt{11}$,

60. Сравните числа $\dfrac{1}{2+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$ и $\dfrac{8}{17}$,

61. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$,

62. $\dfrac{3^2-0,363^2}{3,363}$,

63. $\dfrac{\left(0,875-\frac{1}{8}\right):0,75-1}{0,125+\frac{7}{8}}$,

64. $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$,

65. $\sqrt{\sqrt{2016\cdot 2018\cdot 2020\cdot 2022+16}+5}$,

66. $\sqrt{\sqrt{2013\cdot 2015\cdot 2019\cdot 2021+36}+10}$,

67. $\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{12}-\sqrt{75})$,

68. $\left(\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}\right)(\sqrt{5}-\sqrt{45})$,

69. $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{27+10\sqrt{2}}$,

70. $\dfrac{\left(0,5:0,125+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$,

71. $\left(\dfrac{(2,7-0,8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5,2-1,4):\dfrac{3}{70}}+0,125\right):2\dfrac{1}{2}+0,43$,

72. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{24}+18\sqrt{2}-12\sqrt{3}$,

73. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{32}-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{15}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{12}-4\sqrt{6}-24\sqrt{5}$,

74. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$,

75. $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

3.2 Преобразование буквенных выражений

Во вступительных работах в 9 класс, так же, как и в 8, могут встретиться задания на разложение многочлена на множители, упрощение выражений и действия с дробями. Единственное отличие — появление в этих выражениях корня.

Корень из выражения с корнем. Если перед нами буквенное выражение вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, то действовать надо так же, как и с числовым. Рассмотрим такой пример:
$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}\cdot 1+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$. Обратите внимание, что без дополнительных сведений о переменной x от модуля мы избавиться не можем.

Замена переменных. Если же корни появляются в примерах на действия с дробями, то сильно облегчает решение задачи **замена переменных**, сводящая задание к аналогичному для 7 класса. Пример:

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\left[a=\sqrt{x},\ b=\sqrt{y}\right]=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}=a-b=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Задачи. Все задачи с корнями решаются описанными выше методами, без корней — как в 7 классе. Если в условии задачи присутствует, например, выражение $\sqrt{x}$, то мы считаем, что $x\geqslant 0$ и все дальнейшие преобразования можно делать исходя из этого. Если не указано иное, задание везде — упростить (сократить дробь), разложить на множители или выполнить действия.

1. Упростить выражение $\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{16x^2-8x+1}$ при $\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$,

2. Упростить выражение $\sqrt{25x^2+10x+1}+\sqrt{9x^2+6x+1}$ при $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{5}$.

3. $\dfrac{(5a-4)^2+2(5a-4)(4-3a)+(3a-4)^2}{(2a+5)^2-2(2a+5)(5-3a)+(3a-5)^2}$,

4. $\dfrac{(4b-5)^2+2(4b-5)(5-b)+(b-5)^2}{(7b+4)^2-2(7b+4)(4-3b)+(3b-4)^2}$,

5. $\dfrac{a-b}{a-3\sqrt{ab}+2b}$,

6. $\dfrac{x+4\sqrt{xy}+3y}{x-y}$,

7. $\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$,

8. $\dfrac{x^6+x^4-x^2-1}{x^3+x^2+x+1}$,

9. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}}-\sqrt{\dfrac{1}{4a}}\right)$,

10. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$,

11. a^3-7a+6, 12. a^3-7a-6,

13. $\dfrac{a^4+4}{(a+1)^2+1}$, 14. $\dfrac{b^4+64}{(b-2)^2+4}$,

15. $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\sqrt{b^3}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\right)\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})$,

16. $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{b^3}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right)\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})$,

17. $\dfrac{a+1}{a^4+a^3+a^2}:\dfrac{1}{a^5-a^2}$,

18. $\dfrac{a-1}{a^4-a^3+a^2}:\dfrac{1}{a^5+a^2}$,

19. a^3+2a-3,

20. a^3+3a-4,

21. $\dfrac{m\sqrt{m}-\sqrt{125}}{\sqrt{m}-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{m-5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{m}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5m}}{m-5}$.

22. $\dfrac{a\sqrt{a}+27}{a-3\sqrt{a}+9}-3$, 23. $\dfrac{a\sqrt{a}-27}{a+3\sqrt{a}+9}+3$, 24. $2a^3+3a^2-5$, 25. $2a^3+3a-5$,

26. $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}\cdot\dfrac{a}{b}$, 27. $\dfrac{\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}}\cdot\dfrac{a}{b}$, 28. $\dfrac{x^4+4}{(x+1)^2+1}$, 29. $\dfrac{x^4+4}{(x-1)^2+1}$,

30. $\sqrt{b-2+2\sqrt{b-3}}$, 31. $\sqrt{a-1+2\sqrt{a-2}}$,

32. $\dfrac{a^2}{(a+1)(a-c)}+\dfrac{1}{(c+1)(a+1)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c+1)}$,

33. $\dfrac{9}{(b-3)(c-3)}-\dfrac{b^2}{(b-c)(3-b)}-\dfrac{c^2}{(3-c)(c-b)}$,

34. $\dfrac{a^2-4b^2}{0,5a-b}-4b$, 35. $\dfrac{4a^2-b^2}{a-0,5b}-4a$, 36. a^3-2a+1, 37. a^3-2a-1,

38. $\dfrac{x}{a}-\dfrac{x^2-a^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{x+a}$, 39. $\dfrac{b^2-c^2}{c^2}\cdot\dfrac{c}{b-c}-\dfrac{b}{c}$, 40. $3x^2-11xy-4y^2$,

41. $6y^2+11xy-2x^2$, 42. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+6x+9}$, 43. $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$,

44. $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}-2}+\dfrac{3(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+2}$, 45. $\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{a}-2}-\dfrac{3(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-2}$,

46. Вычислить $\sqrt{t^2+\dfrac{9}{t^2}+6}$ при $t=-0,5$.

47. Вычислить $\sqrt{t^2+\dfrac{4}{t^2}+4}$ при $t=-0,5$.

48. $\left(\sqrt{m}+\dfrac{n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{n^3}}{m\sqrt{m}-n\sqrt{n}}\right)(\sqrt{m}-\sqrt{n})$,

49. $a^2-9b^2+12bc-4c^2$, 50. $a^2-4b^2+12bc-9c^2$, 51. $\dfrac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$,

52. $\dfrac{3\sqrt{x}-2x-x\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$, 53. x^3+4x^2+x-6, 54. x^3-4x^2+x+6,

55. $\left(c-\dfrac{c^3+8}{2c+c^2}\right)\cdot\dfrac{c}{c^2-4c+4}+\dfrac{2}{2-c}$, 56. $\left(c+\dfrac{8-c^3}{c^2-2c}\right)\cdot\dfrac{c}{c^2+4c+4}+\dfrac{2}{2+c}$,

57. $9-x(x-y-3)+3(x-3-y)-y(3+y-x)$,

58. $4-2(2-b-a)+a(2-a-b)-b(a+b-2)$,

59. $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, 60. $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$,

61. $\dfrac{a^2-1}{3a^2-4a+1}\cdot\dfrac{3a-1}{a}-\dfrac{1}{a}$, 62. $\dfrac{a^2-1}{4a^2-5a+1}\cdot\dfrac{4a-1}{a}-\dfrac{1}{a}$,

63. Упростите $\sqrt{xy}\left(\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}\right)$, где $x>0$, $y>0$,

64. $\dfrac{36+x}{6-\sqrt{-x}}$, 65. $\dfrac{49x+1}{1+7\sqrt{-x}}$, 66. $1+4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$, 67. $4x^2y^2-(x^2+y^2)^2+1$,

68. $\left(\sqrt{ab}+\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$, 69. $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$,

70. $\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right):\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x}$, 71. $\left(\dfrac{a^3-8}{a^2-4}-\dfrac{6a}{a+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{a+2}\right)^2$,

72. $\dfrac{b^2-1}{3b^2-4b+1}\cdot\dfrac{3b-1}{b}-\dfrac{1}{b}$, 73. $\dfrac{\sqrt{-ab^2}-\sqrt{a^2b}}{ab}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}$,

74. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$,

75. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{x^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y}\right)-\dfrac{1}{(x-y)^2y^2}$.

76. $\left(\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5-a}}\right)\cdot\sqrt{2+a}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5-a}}\right)-a$,

77. $\left(\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-a}}\right)\cdot\sqrt{2+a}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3-a}}\right)-a$,

78. Упростите выражение $\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-12a+36}$ и найдите его значение
а) при $a=-\dfrac{2}{7}$; б) при $a=\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

79. Упростите выражение $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2-8a+16}$ и найдите его значение
а) при $a=\dfrac{2}{7}$; б) при $a=\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

80. x^4+64, 81. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

82. $36a^2-b^2+24bc-144c^2$, 83. $49m^2-121n^2+22nk-k^2$,

84. $\dfrac{6y-x}{x-2y}:\left(\dfrac{1}{x-2y}+\dfrac{1}{x-3y}-\dfrac{x+y}{x^2-5xy+6y^2}\right)$, 85. $\dfrac{3y-2x}{2x+y}:\left(\dfrac{1}{2x+y}-\dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{x-y}{6x^2+xy-y^2}\right)$.

3.3 Уравнения

Квадратные уравнения. Важнейшей темой, на которой построено множество задач во вступительных олимпиадах, является изучение квадратных уравнений.

Итак, квадратным называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$. Его корнями являются числа $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Число $D = b^2-4ac$ называется дискриминантом и определяет количество корней уравнения: $D < 0$ корней нет, $D = 0$ корень один, $D > 0$ корней два. Эту формулу можно немного упростить, если второй коэффициент является чётным числом. Упрощение заключается в том, что заранее выносится и сокращается множитель 2. Корни уравнения $ax^2+2b_1x+c=0$ можно найти по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2-ac}}{a}$.

Также полезно знать, что имеет место следующее разложение на множители: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Этот факт позволяет раскладывать на множители абсолютно любые квадратичные выражения в обход достаточно громоздкого метода выделения полного квадрата. Множитель a затем может быть занесён в одну из скобок, например $3x^2+x-4 = 3(x-1)(x+\frac{4}{3}) = (x-1)(3x+4)$.

Ещё одним важным инструментом при изучении квадратных уравнений является следующая теорема:

Теорема Виета. Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратите внимание: теорема работает в две стороны. То есть если у вас есть квадратное уравнение, то вы знаете, что выполняются эти равенства; и наоборот, если выполняются эти равенства для некоторых чисел, то вы можете составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1 и x_2.

Теорема Виета может значительно помочь в поиске корней. Рассмотрим, например, уравнение $6x^2+239x-245=0$. Искать его корни при помощи дискриминанта было бы довольно затруднительно. Но мы можем заметить, что оно имеет корень $x=1$. Тогда по теореме Виета его второй корень будет равен $-\dfrac{245}{6}$.

Уравнения, сводящиеся к квадратным Не каждое уравнение сразу представлено как стандартное квадратное. Посмотрим, какие уравнения могут к квадратным в итоге сводиться.

Уравнения с дробями. Если в уравнении есть несколько дробей, то необходимо домножить их все на общий знаменатель. После этого знаменатель можно убрать, не забыв при этом указать, какие значения переменная принимать не может (делить на 0 по-прежнему нельзя). Рассмотрим пример.

$$\begin{gathered} \frac{1}{x}+\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x-1}, \\ (x+1)(x-1)+2x(x-1) = 4x(x+1),\ x \neq 1,\ x \neq 0,\ x \neq -1, \\ x^2-1+2x^2-2x = 4x^2+4x, \\ 3x^2+6x+1 = 0, \\ x_1 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3},\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}. \end{gathered}$$

Уравнения такого вида часто встречаются в процессе решения текстовых задач. Выписывание тех значений x, которые нельзя брать, в данном уравнении не пригодилось. Но делать это надо, есть уравнения, в которых так называемый «посторонний корень» может претендовать на то, чтобы оказаться в ответе.

Замена переменной Как и ранее, если в уравнении видны похожие конструкции, то надо попробовать сделать замену переменной. Это может свести уравнение потенциально более высокой степени к уравнению всё-таки квадратному. Рассмотрим такой пример: $(x^2+x)^2-3=2x^2+2x$. Если традиционно раскрыть скобки и перенести все слагаемые в левую часть, получится уравнение четвёртой степени, которое мы решать не умеем (хотя для него есть формула Феррари, в обычную школьную программу она не входит). Но мы можем заметить некую похожесть выражений в левой и правой части и сделать замену $y=x^2+x$. Тогда имеем $y^2-3=2y$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=-1$, $y_2=3$. Осталось решить ещё два квадратных уравнения: $x^2+x=-1$, $x^2+x+1=0$, $D<0$. Как видим, у уравнения, соответствующего первому найденному значению y, корней нет. Теперь $x^2+x=3$, $x^2+x-3=0$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. Таким образом, ответ найден.

Использование ОДЗ. ОДЗ — это область допустимых значений переменной. Если раньше нельзя было только делить на ноль, то теперь нельзя ещё и извлекать корень из отрицательного числа. Про это нельзя забывать ни в каком уравнении, а в некоторых эти соображения могут напрямую привести к ответу, поэтому с выписывания ОДЗ надо начинать решать любое уравнение.

Модуль. Ещё одно новшество в 8 классе — уравнения с модулем или даже с несколькими. Они решаются принципиально по-разному.

Уравнения с одним модулем. Уравнения с одним модулем необходимо привести к виду $|f(x)|=g(x)$. И тогда верна следующая равносильность:

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.\\ \quad g(x)\geqslant 0.\end{array}\right..$$

Чаще всего необходимо решить два (квадратных) уравнения, а затем проверить полученные корни на условие $g(x)\geqslant 0$. Само это неравенство решать совсем не обязательно, ведь нас интересует только будут ли ему удовлетворять конкретные полученные корни.

Уравнения с двумя модулями. Если в уравнении нет других слагаемых, кроме двух модулей, то применим метод из этого раздела, иначе — из следующего. В этом разделе отметим только следующую равносильность:

$$|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$$

Уравнения с несколькими модулями. Как правило, если в уравнении встречается несколько модулей, то внутри них находятся линейные функции. В таком случае рекомендуется действовать по следующему алгоритму:

1. Перенести все модули так, чтобы перед ними стоял знак «плюс».

2. Поменять внутри всех модулей знаки так, чтобы перед переменной стоял знак «плюс» (например, $|3-2x|=|2x-3|$.) 3. Разобрать случаи (если есть n модулей, то случаев будет $n+1$.)

Этот алгоритм носит рекомендательный характер, но, как показывает практика, ученики, следующие этому алгоритму, допускают в подобных задачах гораздо меньше ошибок. Разберём конкретный пример.

$$|8-x|-|2x-1|=3+|2-x|,$$
$$|x-8|=3+|x-2|+|2x-1|.$$

Теперь необходимо разобрать четыре случая: в зависимости от того, где находится x, модули будут раскрываться по-разному.

1. $x\in(-\infty;\frac{1}{2}]$. Тогда имеем $8-x=3+2-x+1-2x$, $2x=-2$, $x=-1$. Этот x подходит к данному

случаю.

2. $x \in (\frac{1}{2}; 2]$. В этом случае $8 - x = 3 + 2 - x + 2x - 1$, $2x = 4$, $x = 2$. И этот x подходит.

3. $x \in (2; 8]$. Тогда $8 - x = 3 + x - 2 + 2x - 1$, $4x = 8, x = 2$. Этот x разбираемому случаю не подходит (тем более он уже подошёл к другому).

4. $x \in (8; +\infty)$. И, наконец, все модули раскрываются со знаком «плюс» (все выражения внутри модулей неотрицательны): $x - 8 = 3 + x - 2 + 2x - 1$, $2x = -8$, $x = -4$. Этот x нам не подходит в данном случае.

Итак, в результате рассмотрения всех случаев, имеем ответ: $x \in \{-1; 2\}$.

Системы уравнений. В 8 классе уравнения в системе могут быть уже не только линейными. Поэтому, во-первых больше внимания надо уделять не только возможности их складывать и вычитать, но и умножать и делить друг на друга. Во-вторых, появляется такой эффективный метод решения, как выражение одной буквы через другую и подстановка. Этим методом можно решать и линейные уравнения, но в них н обычно уступает по простоте сложению/вычитанию. Теперь же без него не обойтись. Рассмотрим такой пример: $\begin{cases} x + y = 3, \\ y^2 + x = 5. \end{cases}$. Выразив x через y при помощи первого уравнения и подставив во второе, получим $y^2 + 3 - y = 5$, $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Подставив найденные значения y в выражение для x, получим два ответа: $(1; 2)$, $(4; -1)$.

Задачи. В данном разделе будут приведены только уравнения без параметров (параметры будут рассмотрены в отдельном разделе). Во всех уравнениях задача одна — решить.

1. $\frac{3x-2}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3x+4}{x^2-2x}$,
2. $\frac{1}{3-x} - \frac{2x+6}{x^2-3x} = \frac{2-5x}{x}$,
3. $(x+5)^4 + 8(x+5)^2 - 9 = 0$,
4. $(x-4)^4 - 3(x-4)^2 - 4 = 0$,
5. $\frac{6x}{x+1} = \frac{12x}{x^2-x+1} - \frac{12x^2-6x}{x^3+1}$,
6. $\frac{5x}{1-x} = \frac{10x}{x^2+x+1} + \frac{10x^2+5x}{1-x^3}$,
7. $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$,
8. $\frac{2}{1+x+x^2} = 2 - x - x^2$,
9. $|x+1| + |x+2| = 1$,
10. $|x-1| + |x-2| = 1$,
11. $(x+3)^2 - |x+3| - 30 = 0$,
12. $(x-2)^2 - 3|x-2| - 28 = 0$,
13. $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$,
14. $(x+2)^4 + 2x^2 + 8x - 16 = 0$,
15. $|x-3| + |x-5| = 2$,
16. $\frac{1}{x-5} - \frac{3}{x-3} = \frac{2}{x-4} - \frac{4}{x-2}$,
17. $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-3}$,
18. $|3x+8| = x$,
19. $|2x+9| = x$,
20. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-3} = 0$,
21. $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} = 0$,
22. $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 13 = 0$,
23. $(x+1)^4 - x^2 - 2x - 13 = 0$,
24. $|x^2 - 3x + 5| = |4 - 2x - 2x^2|$,
25. $\frac{2}{x-1} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$,
26. $\frac{2}{x+1} = \frac{x-5}{x^2-x-2}$,
27. $|x| - x + 2 = |2x-2|$,
28. $|x| + x + 2 = |2x+2|$,
29. $\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x+1} = \frac{2-x}{x+1} + \frac{3}{x-4}$,
30. $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+4} = \frac{2+x}{1-x} - \frac{3}{x+4}$,
31. $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x - 6$,
32. $|5x - x^2 - 6| = 5x - x^2 - 6$,

33. $\begin{cases} x+2y=3, \\ x^2+y=2. \end{cases}$,

34. $\begin{cases} x-2y=3, \\ x^2-y=2. \end{cases}$,

35. $\dfrac{4x+8}{x^2-4}+2x+5=0$,

36. $\dfrac{6x-18}{x^2-9}+2x-7=0$,

37. $(x^2-x+1)(2x^2-2x+1)=10$,

38. $(x^2+x+1)(2x^2+2x+1)=10$,

39. $|x^2-10|=6$,

40. $|x^2-17|=8$,

41. $\begin{cases} x^2-16y^2+x+4y=0, \\ 3x-4y=16. \end{cases}$,

42. $\begin{cases} x^2-9y^2+x-3y=0, \\ 4x+3y=10. \end{cases}$,

43. $2x^2+3x-17=2(2-\sqrt{7})^2+3(2-\sqrt{7})-17$,

44. $x^2+2(1+\sqrt{8})x+8\sqrt{2}=0$,

45. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$,

46. $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}$,

47. $(x+2)^3-x^3=2$,

48. $(2-x)^3+x^3=2$,

49. $\dfrac{36}{4-x^2}+2=\dfrac{1-x}{x+2}-\dfrac{9}{x-2}$,

50. $\dfrac{3x}{x+3}-\dfrac{42}{x^2-9}=1+\dfrac{7}{3-x}$,

51. $\dfrac{2x+1}{1+x}=\dfrac{2}{x^2-1}$,

52. $\dfrac{1-2x}{x-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}$,

53. $\sqrt{x-3}(3x^2-14x+8)=0$,

54. $\sqrt{x-2}(3x^2-11x+6)=0$,

55. $2|x+1|=|5-x|$,

56. $2|x+2|=|4-x|$,

57. $2|2-x|=|x+7|$,

58. $3|3-x|=|x+1|$,

59. $\begin{cases} xy+x^2=10, \\ xy+y^2=15. \end{cases}$,

60. $\begin{cases} y^2-xy=4, \\ x^2-xy=-3. \end{cases}$,

61. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x=3$,

62. $(x^2+2x)^2-2x^2-4x=3$,

63. $x^3-x^2+4x-4=0$,

64. $x^3-x^2+5x-5=0$,

65. $\begin{cases} 0,4x+\dfrac{1}{3}y=1,8, \\ \dfrac{1}{5}x+0,27y=1,21. \end{cases}$,

66. $\begin{cases} 0,4x-\dfrac{1}{3}y=1,8, \\ \dfrac{1}{5}x+0,27y=-0,41. \end{cases}$,

67. $|x-7|+|x-5|=x-4$,

68. $|x-6|+|x-4|=x-3$,

69. $\dfrac{3x}{x+3}-\dfrac{42}{x^2-9}=1+\dfrac{7}{3-x}$,

70. $\sqrt{(x-5)^2}=2x-6$,

71. $\sqrt{(x-7)^2}=4-3x$,

72. $\dfrac{-2x^2+3-5x}{x+2}\cdot\sqrt{2-|x|}=0$,

73. $\dfrac{4+7x-2x^2}{x-3}\cdot\sqrt{3-|x|}=0$,

74. $\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{x^2-3x+2}+10x=20$,

75. $\sqrt{x-2}=100|x-3|+1$,

76. $x^3+3x^2+3x+\dfrac{7}{8}=0$,

77. $2x^2-3x-4=2(1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-4$,

78. $x^2-2x+1+\sqrt{7x-7}=0$,

79. $2\,||x+4|-1|+6=30$,

80. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=63$,

81. $\dfrac{2}{x^2+36+12x}-\dfrac{12}{36-x^2}=\dfrac{1}{x-6}$,

82. $3x^2+2x+1=3(1-\sqrt{3})^2+2(1-\sqrt{3})+1$,

83. $9x^3+3x^2+3x+1=0$,

84. $x^3+x^2-4x-4=0$,

85. $|x-7|+|x^2-5|=x-4$,

86. $4x^4+3x^2-1=0$,

87. $\begin{cases} 3x^2-y=7, \\ 5y-3x^2=-23. \end{cases}$,

88. $x^3+x^2=2x$,

89. $\begin{cases} 2x^2+xy=40, \\ 3x-y=10. \end{cases}$,

90. $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = -6. \end{cases}$, 91. $\begin{cases} y - x = 3, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$,

92. $x^2 - 6x + 7 + \dfrac{2}{x^2 - 6x + 10} = 0$, 93. $x^2 - 3x - 1 + \dfrac{3}{x^2 - 3x + 3} = 0$,

94. $|x - 1| = 2x + 1$, 95. $|x + 1| = 1 - 2x$,

96. $(x^2 - 2x - 1)^2 + 3x^2 - 6x - 13 = 0$, 97. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$,

98. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

3.4 Неравенства

В 8 классе к линейным неравенствам добавляются неравенства более высоких степеней и неравенства с модулями.

Модули. Рассмотрим несколько возможных видов, к которым можно привести неравенство с модулем. Выпишем несколько равносильностей, которые позволяют эти неравенства решить.

$$|f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right. \qquad |f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| \geqslant |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geqslant 0.$$

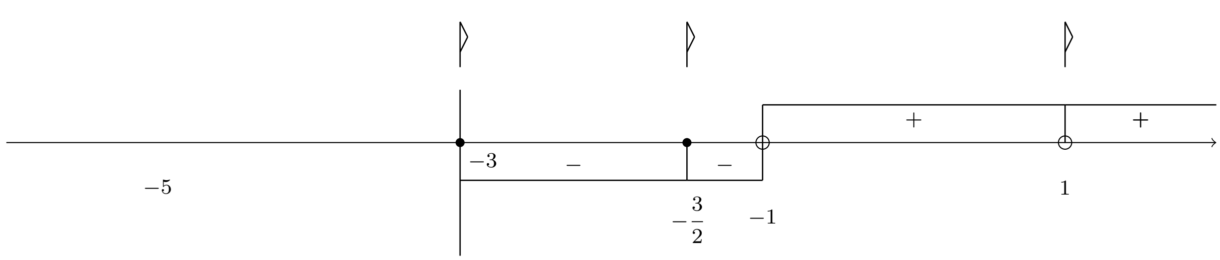
Если в исходном неравенстве знак строгий ($<$ или $>$), то в равносильных неравенствах все знаки также строгие. С помощью этих равносильностей можно решить все неравенства с одним модулем или двумя модулями без других слагаемых. Если же неравенство ни к одному из этих видов не приводится, то его необходимо решать при помощи разбора нескольких случаев, как это было сделано выше для уравнения с несколькими модулями.

Метод интервалов. Главным инструментом при решении неравенств в 8 классе является метод интервалов. Ниже мы представим алгоритм, по которому к этому методу надо приходить, и разберём пример его применения.
1. Перенести все слагаемые в левую часть. Метод интервалов работает только при сравнении с нулём.
2. Привести все слагаемые в одну дробь. Зачастую в неравенствах участвуют именно дроби, так что необходимо преобразовать их сумму или разность в одну.
3. Разложить числить и знаменатель получившейся дроби на линейные сомножители.
4. Отметить на числовой прямой все числа, при которых получившиеся линейные множители равны нулю. Над числами, которые соответствуют скобкам, не меняющим знак (модули, чётные степени, корни, сокращающиеся множители), поставить флажок. Числа, которые соответствуют скобкам знаменателя, выколоть (обвести в кружок).
5. Расставить на получившихся интервалах знаки «+» и «-», начиная с самого правого (представить, что вместо переменной мы взяли очень большое число).

Итак, рассмотрим неравенство, в котором присутствуют сразу все стандартные «ловушки». Пункты 1—3 будут опущены, в них нет ничего нового по сравнению с программой 7 класса.

$$\frac{\left|x + \dfrac{3}{2}\right| \sqrt{x+3}(x+5)^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0.$$

Обратите внимание, что мы НЕ сократили множитель $(x-1)$, хотя он присутствует как в числителе, так и в знаменателе. Это сделано для того, чтобы не забыть выколоть точку $x = 1$ на числовой прямой (хотя на знак она уже и не влияет).



Проанализируем получившуюся картинку. Во-первых, обратим внимание на вертикальную линию при $x = -3$. Она говорит о том, что никакие x, меньшие минус трёх, рассматривать нельзя, ведь в выражении присутствует корень из $x+3$, а извлекать корни из отрицательных чисел нельзя. Во-вторых, обратим внимание на флажки. Мы их поставили над числами, которые соответствуют выражениям, не влияющим на знак: сокращающейся скобке $(x-1)$, модулю $\left|x+\dfrac{3}{2}\right|$ и корню $\sqrt{x+3}$. Мы бы поставили флажок и над числом -5, соответствующим скобке в чётной степени $(x+5)^2$, но, как уже было отмечено, числа, меньшие -3, в этой задаче рассматривать не надо. В-третьих, обратим внимание на кружки: закрашенный кружок у чисел, соответствующим выражениям из числителя (такие числа брать в ответ можно), пустой кружок у чисел, соответствующим выражениям из знаменателя (такие числа брать нельзя). И, наконец, подставив в уме вместо x число 100, определяем, что самый правый знак будет $+$. Далее знаки будут меняться в тех точках, где нет флажка и сохраняться в точках с флажком. Главное в этом задании — не забыть включить в ответ закрашенные точки с флажком и убрать из него выколотые точки. Учитывая всё это, получаем ответ $x \in \{-3; -\dfrac{3}{2}\} \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. В этом ответе есть как изолированные точки (-3 и $-\frac{3}{2}$), так и выколотая (точка 1). Заметим, что если знак у неравенства строгий, то абсолютно все точки будут выколотыми.

Задачи. Все приведённые задачи решаются при помощи описанных выше методов. Одна из самых частых ошибок — домножение неравенство на выражение, знак которого заранее не известен, и сокращение множителей без учёта неподходящих значений переменной впоследствии. Если не указано иное, задание одно: решить неравенство.

1. $\dfrac{(x^2+5x-14)(x-3)^2}{|x+1|} \leqslant 0$, 2. $\dfrac{(x^2-6x-16)(x+5)^2}{|x-2|} \leqslant 0$,

3. $\dfrac{(2x^2+7x-4)(x-3)^2}{x+6} \leqslant 0$, 4. $\dfrac{(5x^2+6x+1)(x-2)^2}{x-4} \geqslant 0$,

5. $\dfrac{(x^2-1)(2x^2-5x-7)}{2-x} \leqslant 0$, 6. $\dfrac{(x^2-1)(2x^2+5x-7)}{3-x} \leqslant 0$,

7. Доказать неравенство: $a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{ab}+\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$ для любых положительных чисел a и b.

8. Доказать неравенство: $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ для любых положительных чисел a, b, c.

9. Доказать, что если $\sqrt{x}-\sqrt{y}=10$, то $x-2y \leqslant 200$.

10. Доказать, что если $\sqrt{x}-\sqrt{y}=8$, то $x-2y \leqslant 128$.

11. $|2x+5| < x+4$, 12. $|3x+7| < x+3$,

13. $\sqrt{x}\cdot|1-x|\cdot(2-x)\cdot(3-x^2) \leqslant 0$, 14. $\sqrt{x}\cdot(1-x)\cdot|2-x|\cdot(3-x)^2 \geqslant 0$,

15. $|x+3|-|2x-4| < 5$, 16. $|x-3|-|2x+4| < 5$,

17. $\dfrac{x^2+3}{x+1} \leqslant 2$, 18. $\dfrac{x^2}{x-1} \leqslant 4$,

19. $|3x-7|+|x+2| > 7$, 20. $\dfrac{\sqrt{x-3}}{(x-1)(x-5)^2(x-6)} \leqslant 0$,

21. $\dfrac{\sqrt{x-4}}{(x-2)(x-6)^2(x-7)} \leqslant 0$, 22. $|x|\cdot\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-x+1} \geqslant 0$,

23. $|x|\cdot\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} \geqslant 0$, 24. $|2x-3| < 4+x$,

25. $|2x-1| < 5+x$, 26. $\dfrac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{\sqrt{x+2}} \geqslant 0$,

27. $\dfrac{(x-2)^2(x+2)(x-4)}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$, 28. $\dfrac{x^2-3}{x+2} \geqslant -6$,

29. $\dfrac{x^2-3}{x-2} \leqslant 6,$ 30. $\dfrac{(x-1)^2(x^2-x-2)}{x^2+3x+2} \geqslant 0,$

31. $\dfrac{(x+1)^2(x^2+x-2)}{x^2-3x+2} \geqslant 0,$ 32. $\dfrac{x^2}{x+2} \leqslant -x,$

33. $\dfrac{x^2}{2-x} \leqslant x,$ 34. $|3x+2| \geqslant x^2-2,$

35. $|2-3x| \geqslant x^2-2,$ 36. $\dfrac{3}{x} < 5,$

37. $\dfrac{7}{x} < 4,$ 38. $x^2-3x+2 > |x-5|,$

39. $x^2-5x+6 > |x-6|,$ 40. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x},$

41. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x},$ 42. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3} \geqslant \dfrac{1}{x},$

43. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3} \geqslant \dfrac{1}{x},$ 44. $|x^2-6x-7| \geqslant -6x+7,$

45. $|x^2-2x-15| \geqslant -2x+15,$ 46. $\dfrac{x^2-2x-8}{x-4} \leqslant 7,$

47. $\dfrac{x^2-4x-5}{x-5} \leqslant 7,$ 48. $\dfrac{7}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{9}{x-2}+1 \leqslant 0,$

49. $\dfrac{1}{3-x} \geqslant \dfrac{1}{(x^2-9)(3-x)},$ 50. $\dfrac{1}{(4-x^2)(x-2)} \leqslant \dfrac{1}{2-x},$

51. $\dfrac{x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{7})x+\sqrt{21}}{\sqrt{5-x}} \cdot \dfrac{x^2-4x+4}{6x-x^2-9} \leqslant 0,$ 52. $\dfrac{\sqrt{x}}{2x-1} \geqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x-5},$

53. $x\sqrt{x+2} > x,$ 54. $\dfrac{3x^2+2x^3-x^4}{\sqrt{x+2}} \leqslant 0,$

55. $x|x-2| \leqslant x-2,$ 56. $-\dfrac{1}{2}x^2+2,5x-3 \geqslant 0,$

57. $\dfrac{4}{x^2-x-6} \geqslant \dfrac{1}{2+x},$ 58. $x^2-x > |x+3|$

59. $|x^2-3| < |3-x|\,,$ 60. $\dfrac{x^2-20}{5x^2+12} \leqslant \dfrac{x-8}{5x^2+12},$

61. $\left(1+\left(x-\dfrac{3}{2}\right):3\right)(-0,75) < 0,$ 62. $x^2+x > |x-3|,$

63. Найти все значения x, при которых меньшее из чисел x и x^2-3 меньше 6.

64. Наименьшее из чисел m, n обозначается $min(m;n)$. Если числа равны, то тогда $min(m;n)=m=n$. найдите все значения x, при которых $min(x+15;x^2+3) \geqslant 4$.

65. Найдите все значения x, при которых большее из чисел x и x^2-3 не меньше 1.

66. $\dfrac{2x^3+3x^2}{x-2} \geqslant 0,$ 67. $\dfrac{2x^3-3x^2}{x+2} \geqslant 0,$ 68. $\dfrac{|3x+2|}{x} < -1,$ 69. $\dfrac{|2x+1|}{x} < -1,$

70. $|2x+5|+x < 7,$ 71. $\dfrac{x^3+2x^2+7}{7-x} \geqslant 1,$ 72. $\dfrac{(x+1)(x-8)^4}{(x+2)^2(5-x)} \geqslant 0,$ 73. $\dfrac{x^2(x^2-2x+1)}{(x+7)^3(3-x)} \leqslant 0,$

74. Найдите наибольшее целое решение неравенства $(2-\sqrt{5})x > 2+\sqrt{5}$.

75. Найдите наибольшее целое решение неравенства $(\sqrt{3}-2)x > \sqrt{3}+2$.

76. $|x-3| > 6-3x,$ 77. $|x-4| > 2x-1.$

3.5 Исследование функций и уравнений

В этом разделе будут приведены задачи на исследование как квадратных трёхчленов, так и функций (и уравнений) более сложного вида. Начнём с квадратных уравнений.

Количество корней. Количество корней у квадратного уравнения с параматером зависит от **двух** вещей: дискриминанта и коэффициента при x^2. Если коэффициент при x^2 не равен нулю, то всё зависит только от знака дискриминанта, как уже было описано выше. Если же коэффициент при x^2 обнуляется, то возможны следующие случаи: нет корней, один корень, бесконечно много корней. Например, у уравнения $ax^2 + x + 2 = 0$ при $a = 0$ имеется один корень. У уравнения $(a + 2)x^2 + (2a + 4)x - 1 = 0$ при $a = -2$ корней нет вообще. И, наконец, у уравнения $(a^3 - 1)x^2 + (a^2 - 1)x + 1 - a = 0$ при $a = 0$ корней бесконечно много.

При решении уравнений с параметром необходимо обратить внимание на следующее: выраженный через параметр корень может во-первых совпадать с уже найденным, а во-вторых может не подходить по ОДЗ. Это влияет на общее количество корней исследуемого уравнения.

ОДЗ. Если в задании требуется найти ОДЗ функции, то требуется, чтобы выполнялись всего две вещи: все подкоренные выражения должны быть **неотрицательны** (не обязательно положительны!) и все знаменатели должны быть не равны нулю.

Теорема Виета. На многие вопросы о квадратном уравнении позволяет ответить уже упоминавшаяся теорема Виета. Самое главное — это то, что она позволяет не решать при этом само уравнение, корни которого могут быть довольно неприглядного вида. Приведём два примера.
Первый пример. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$. Как мы видим, у этого уравнения $D = 29$, что не позволяет надеяться на нахождение его корней в удобном виде. И тут на помощь приходит теорема Виета. Мы знаем, что $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = -5$. Через сумму и произведение чисел нетрудно выразить сумму их кубов: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2) = 3 \cdot (3^2 - 3 \cdot (-5)) = 72$.
Второй пример. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4x + 2 = 0$. У какого квадратного уравнения корнями будут числа $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$? Здесь мы воспользуемся обратной теоремой Виета: найдём сумму и произведение данных чисел (при помощи прямой теоремы Виета), а затем подберём подходящие коэффициенты. Итак, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{-4}{2} = -2$, $\dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{2}$. Нетрудно подобрать коэффициенты $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$, таким образом искомое уравнение будет иметь вид $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

Теорема Виета также позволяет ответить на вопросы о знаках корней. Если нужны только положительные корни — их сумма и произведение должны быть положительны. Если отрицательные — сумма отрицательна, а произведение положительно. Если разных знаков — достаточно отрицательного произведения. Чтобы понять, что число d лежит между корнями, достаточно рассмотреть выражение $(x_1 - d)(x_2 - d)$. Если это выражение отрицательно, то скобки разных знаков, что говорит о том, что число d больше одного из корней и меньше другого. Но во всех этих задачах не следует забывать, о том что теорема Виета никак не гарантирует наличия корней! Чтобы убедиться, что корни существуют, необходимо проверить условие $D \geqslant 0$.

Наименьшее и наибольшее значение. У квадратичных функций наименьшее и наибольшее значение на отрезке может достигаться либо в вершине параболы, либо на концах этого отрезка. С параболами мы ближе познакомимся в разделе, посвящённом графикам функций, здесь же достаточно знать формулу для вершины: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

Задачи. В этом разделе собраны задачи, в которых надо так или иначе исследовать функции или корни уравнений.

1. В уравнении $x^2 - 4x + a = 0$ сумма квадратов корней уравнения равна 16. Найти a.
2. В уравнении $x^2 - 2x + a = 0$ квадрат разности корней уравнения равен 16. Найти a.
3. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-3|(x+4)(x^2+9x+20)}{x^2-x-6}}$.
4. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-1|(x+3)(x^2+8x+15)}{x^2+x-2}}$.
5. Доказать, что если $c \cdot (a+b+c) < 0$, то квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет корни.
6. Доказать, что если $c \cdot (a-b+c) < 0$, то квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет корни.
7. При каких k уравнение $(k-2)x^2 + 2(k-1)x + k = 0$ имеет единственный корень?
8. При каких k уравнение $(k+2)x^2 + 2(k+1)x + k = 0$ имеет единственный корень?
9. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на данном промежутке: $y = x^2 - 7x + 6$, $-1 \le x \le 8$.
10. Найти область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2(2x-x^2+2)}{(x^2+x-6)|x+2|}}$.
11. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 2xy + 8y^2$, если $x + 2y = 4$.
12. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 2xy + 8y^2$, если $x - 2y = 4$.
13. При каких значениях a уравнение $(x-3)(x-a)(x-2a) = 0$ имеет ровно два различных корня?
14. При каких значениях a уравнение $(x-5)(x-a)(x-2a) = 0$ имеет ровно два различных корня?
15. При каких значениях q сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 10x + q = 0$ равна 2?
16. При каких значениях q сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 10x + q = 0$ равна 2?
17. Решить относительно x уравнение $(k-1)x^2 - (2k-1)x + 2 = 0$.
18. Решить относительно x уравнение $(k-1)x^2 - (2k-3)x - 2 = 0$.
19. Не решая уравнения $2x^2 - 3x - 11 = 0$ найти $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$, где x_1, x_2 — корни этого уравнения.
20. Не решая уравнения $2x^2 + 3x - 11 = 0$ найти $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$, где x_1, x_2 — корни этого уравнения.
21. Найдите наибольшее значение, которое может принимать xy, если $2x + 3y = 6$.
22. Найдите наибольшее значение, которое может принимать xy, если $3x + 2y = 6$.
23. При каких k один из корней уравнения $x^2 - (k+4)x + 2k + 4 = 0$ в два раза больше другого?
24. При каких k один из корней уравнения $x^2 - (k+5)x + 2k + 6 = 0$ в два раза больше другого?
25. При каких a уравнение $\dfrac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x-3} = 0$ имеет ровно один корень?
26. При каких a уравнение $\dfrac{x^2 - 5ax + 4a^2}{x-4} = 0$ имеет ровно один корень?
27. Найти те значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + 20 = 0$ равна 24.
28. Найти те значения b, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - bx + 10 = 0$ равна 16.
29. Определить, при каких x и y выражение $5x^2 - 4x + y^2 + 2xy + 1$ принимает наименьшее значение.
30. Определить, при каких x и y выражение $5y^2 + 4y + x^2 - 2xy + 1$ принимает наименьшее значение.
31. При каких значениях q сумма квадратов корней уравнения $x^2 - qx + 4 = 0$ равна 17?
32. При каких значениях q сумма квадратов корней уравнения $x^2 - qx + 3 = 0$ равна 10?
33. При каких значениях t уравнение $\dfrac{(x-t)(x-2)}{x-2t} = 0$ имеет ровно два разных корня?
34. При каких значениях t уравнение $\dfrac{(x-t)(x-4)}{x-4t} = 0$ имеет ровно два разных корня?
35. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2 + 2x - a + 1 = 0$ имеет ровно один корень?

36. При каких значениях a уравнение $(1-a)x^2-2x+a+1=0$ имеет ровно один корень?
37. Вычислить $3x^2-2x-1$ при $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$.
38. Вычислить $3x^2+2x-1$ при $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.
39. При каких значениях x выполняется равенство $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{3-x}$?
40. При каких значениях x выполняется равенство $\sqrt{x^2-6x+5}=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{5-x}$?
41. Найдите наименьшее значение выражения $2x^2+4xy+4y^2+3$.
42. Найдите наименьшее значение выражения $4x^2-4xy+2y^2+5$.
43. При каких значениях t неравенство $\dfrac{\sqrt{x-t}}{(x-2)(x-3)}<0$ не имеет корней?
44. При каких значениях t неравенство $\dfrac{\sqrt{x-t}}{(x-3)(x-4)}<0$ не имеет корней?
45. При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2+2ax+4=0$ имеет два различных корня?
46. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2-2ax-4=0$ имеет два различных корня?
47. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2-(2a+6)x+3a+3=0$ имеет единственное решение.
48. Определите, при каких значениях параметра k уравнение $kx^2-2(k+1)x+k+3=0$ имеет единственное решение.
49. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-5x-11=0$. Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$.
50. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2-3x-11=0$. Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$.
51. Найдите произведение вещественных корней уравнения $x^4-3x^2-4=0$.
52. Найдите произведение вещественных корней уравнения $x^4+3x^2-4=0$.
53. При каких значениях a уравнение $ax^2-4x+a=0$ имеет два различных корня?
54. При каких значениях a уравнение $ax^2+4x+a=0$ имеет два различных корня?
55. При каких значениях t уравнение $\dfrac{(x-t)(x-2t)}{x-1}=0$ имеет два различных корня?
56. При каких значениях t уравнение $\dfrac{(x-t)(x-2t)}{x-2}=0$ имеет два различных корня?
57. Пусть x_1 — меньший корень уравнения $2x^2+4x-5=0$. Вычислите $4x_1^2+8x_1-7$.
58. Пусть x_1 — меньший корень уравнения $3x^2+2x-7=0$. Вычислите $6x_1^2+4x_1-11$.
59. Если $x^2-12x+15=(x+a)^2+b$, то чему равно значение b?
60. Если $x^2-8x-3=(x+a)^2+b$, то чему равно значение b?
61. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+6=0$. Решить уравнение, если $x_1^2+x_2^2=37$.
62. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-px+10=0$. Решить уравнение, если $x_1^2+x_2^2=29$.
63. При каких значениях a уравнение $x^3+6x^2+ax=0$ имеет два различных корня?
64. При каких значениях a уравнение $4x^3+4x^2+ax=0$ имеет два различных корня?
65. При каких значениях a система $\begin{cases} y=x^2-4x+3, \\ y=a. \end{cases}$ имеет единственное решение?
66. При каких значениях a система $\begin{cases} y=x^2+4x+3, \\ y=a. \end{cases}$ имеет единственное решение?
67. Найти сумму корней квадратного уравнения $x^2+9x+20=0$.
68. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+2xy+8y^2$, если $x-2y=4$.
69. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+8x+15}{x-2}}$.

70. Найти область определения функции $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+8}}{x-5}$.
71. Найти область определения функции $\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x-6}$.
72. При каких значениях k уравнение $7x^2-2x+4k=0$ имеет только положительные корни?
73. При каких значениях k уравнение $3x^2-2x+9k=0$ имеет только положительные корни?
74. Какие значения может принимать y, если $3x+2y=6$ и $|x|<8$?
75. Какие значения может принимать x, если $4x+3y=8$ и $|y|<12$?
76. При каких значениях параметра a число 1 расположено между корнями уравнения $x^2+(a+1)x-a^2=0$?
77. При каких значениях параметра a число 1 расположено между корнями уравнения $x^2+(1-a)x-a^2=0$?
78. Решить уравнение $x^2-15x+q=0$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{5}{12}$.
79. Решить уравнение $x^2+px+36=0$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{5}{12}$.
80. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2-1)x^2-2(a^2-2a+1)x+4a-4=0$ имеет более 2 корней?
81. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2-a)x^2-2(a^2-3a+2)x-3a+3=0$ имеет более 2 корней?
82. Не решая уравнение $x^2-4x-1=0$, найдите сумму кубов его корней.
83. Не решая уравнение $x^2-3x-2=0$, найдите сумму кубов его корней.
84. Решите уравнение $x^3-x^2+bx+24=0$, если известно, что один из его корней равен 3.
85. Решите уравнение $x^3+x^2+bx-24=0$, если известно, что один из его корней равен -2.
86. При каких значениях x и y выражение $6-2x^2-2xy-6x-y^2$ принимает наибольшее значение?
87. При каких значениях x и y выражение $20-2x^2+2xy-4x-y^2$ принимает наибольшее значение?
88. При каких a уравнение $ax^2-2(a-2)x+a+1=0$ имеет ровно один корень?
89. При каких a уравнение $ax^2+4(a-1)x+4a-3=0$ имеет ровно один корень?
90. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2-(a^2-5a)x+4a^2=0$ будет отрицательной.
91.Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2+(a^2-5a)x+4a^2=0$ будет положительной.
92. При каких значениях параметра a уравнение $(x-5)(2x-a)=x-5$ имеет ровно один корень?
93. При каких значениях параметра a уравнение $(x-3)(2x-a)=x-3$ имеет ровно один корень?
94. При каких положительных значениях параметра a уравнение $ax=|x-2|$ имеет единственное решение?
95. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{24-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-20}}$.
96. При каких значениях параметра a уравнение $ax=|x+2|$ имеет единственное решение?
97. Найдите все значения параметра k, при которых следующая система имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases}(k+2)x+3y=9+kx,\\ x+(k+4)y=2.\end{cases}$$

98. Найдите все значения параметра a, при которых следующее уравнение имеет ровно одно решение: $(ax^2+3x+1)(x-3)=(x-3)$.
99. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней следующего уравнения отрицательна: $x^2-(a^2-5a)x+4=0$.

100. Пусть $x_1,\ x_2$ — корни уравнения $2x^2-7x+4=0$. Не решая это уравнение, найдите $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_1}$.
101. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $7x^2-2x+4a=0$
а) имеет корень, равны 3.
б) имеет два различных вещественных корня.
в) имеет только положительные корни.
г) не имеет отрицательных корней.
102. а) При каких значениях параметра a уравнение $x^2-ax+a-1=0$ имеет два различных корня?
б) При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-ax+a-1}{x+5}=0$ имеет единственное решение?
103. а) При каких значениях параметра a уравнение $x^2-ax+3a-9=0$ имеет два различных корня?
б) При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-ax+3a-9}{x-4}=0$ имеет единственное решение?
104. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2(a-2)x+3=0$ имеет единственный корень.
105. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+3)x^2-2(a+3)x-5=0$ имеет единственный корень.
106. $f(x)=ax+b,\ ab\neq 0$. График $f(x)$ проходит через I, II и IV четверти. Определите знаки a,b.
107. $f(x)=ax+b,\ ab\neq 0$. График $f(x)$ проходит через I, III и IV четверти. Определите знаки a,b.
108. Решением неравенства $ax^2+bx+c>0$ является промежуток $(x_1;x_2)$, причем $x_1\cdot x_2<0$. Определите знаки a и c.
109. Решением неравенства $ax^2+bx+c<0$ является промежуток $(x_1;x_2)$, причем $x_1\cdot x_2<0$. Определите знаки a и c.
110. Найдите наибольшее значение выражения и определите, при каких значениях x и y оно достигается: $\dfrac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}$.
111. Найдите наибольшее значение выражения и определите, при каких значениях x и y оно достигается: $\dfrac{8}{x^2+y^2-2x-10y+30}$.
112. Найдите область определения функции: $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-2x}{3x+5}+2}$.
113. Найдите область определения функции: $f(x)=\sqrt{\dfrac{5+6x}{3x+4}-1}$.
114. При каком a квадрат разности корней квадратного уравнения квадратного уравнения
$x^2-3x+a=0$ равен 25?

3.6 Графики

К уже известным графикам линейных функций в 8 классе присоединяются графики квадратичных функций (параболы). Также гораздо чаще будут применяться модули.

Парабола. Параболой называют график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Если прямая строилась по двум точкам, то парабола (кривая второго порядка) строится как минимум по трём. Одна из этих точек обязательна — это вершина параболы, координата по оси x у которой равна $-\dfrac{b}{2a}$. Так как любая парабола симметрична относительно вертикальной прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$, для построения удобно брать те x, которые также симметричны относительно этой прямой (например, на 2 больше и на 2 меньше). Для более точного построения параболы рекомендуется взять две-три пары таких точек.

Все параболы делятся на два типа — «ветвями вверх» ($a > 0$) и «ветвями вниз» ($a < 0$). В вершине при этом парабола достигает наименьшего и наибольшего значения соответственно. Также по графику параболы можно определить значение коэффициента c — это ордината точки параболы при $x = 0$. Чтобы понять, какая функция изображена на графике перед вами, достаточно подставить несколько различных x и посмотреть, какие y должны получаться.

Модуль. Построение графиков вида $|f(x)|$ и $f(|x|)$ было описано выше. Если же модуль участвует в определении функции каким-то другим образом, то неизбежен разбор случаев с получением нескольких разных функций, каждая на своём интервале. Пример:

$$f(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -2x, \ x < -1, \\ 2, \ -1 \leqslant x < 1, \\ 2x, x \geqslant 1. \end{cases}$$

Задачи. Принципы нахождения точки пересечения графиков и построения множеств с 7 класса не изменились. Обратите внимание, что графики никаких функций, кроме линейных и квадратичных, в 8 классе строить не надо. Любая функция должна так или иначе упроститься до вида указанных. При этом на разных промежутках могут получиться разные функции. И в процессе упрощения не стоит забывать о тех значениях переменной, которые нельзя подставлять: соответствующие им точки на графике необходимо будет выколоть.

1. Построить график квадратного трёхчлена $y = 3x^2 + (a+3)x + a$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 2$.

2. Построить график квадратного трёхчлена $y = 3x^2 + (a-1)x + a$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -2$.

3. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x+3|} + x$.

4. Построить график функции $y = \dfrac{2x - x^2}{|x-2|} + x$.

5. Построить график квадратного трёхчлена $y = x^2 - 15x + q$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{5}{12}$.

6. Построить график квадратного трёхчлена $y = x^2 + 9x + q$, если известно, что его корни x_1, x_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{2}$.

7. Построить график функции $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}(x-1)$.
8. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}(x+1)$.
9. Построить график квадратного трёхчлена $y = x^2 - 8x + q$, если сумма квадратов его корней равна 34.
10. Построить график квадратного трёхчлена $y = x^2 - 8x + q$, если квадрат разности его корней равен 4.
11. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+2x+1}{|x+1|}$.
12. Построить график функции $y = \dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$.
13. Построить график функции $y = \dfrac{2x^2-5x+2}{x-2} \cdot (x+1)$.
14. Построить график функции $y = \dfrac{2x^2+5x+2}{x+2} \cdot (x-1)$.
15. Построить график функции $y = \dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$.
16. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+5x+6}{|x+2|}$.
17. На координатной плоскости изобразите множество точек, задаваемых уравнением:
$(y-2x)\left(|x|-5-y\right) = 0$.
18. Упростить и построить график $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}$.
19. Построить график функции $y = 2x^2 - ax - a$, если известно, что корни квадратного трёхчлена удовлетворяют условию $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = -3,5$.
20. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|y| = x+1$.
21. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|y| = x-1$.
22. Построить график $y = |x| + |x+2|$.
23. Построить график $y = |x| + |x-2|$.
24. Прямая проходит через точку $A(1;2)$ и пересекает ось ординат в точке, удалённой от начала координат на 2. Найти уравнение прямой.
25. Прямая проходит через точку $A(-1;2)$ и пересекает ось ординат в точке, удалённой от начала координат на 2. Найти уравнение прямой.
26. Построить график функции $y = \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x+2}$.
27. Построить график функции $y = \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x-2}$.
28. Построить график $y = \dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$.
29. Построить график $y = \dfrac{x^2-4x+3}{|x-3|}$.
30. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=3$, проходящей через точку $A(1;2)$.

31. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=3$, проходящей через точку $A(2;4)$.
32. Построить график $y=1-|x-2|$.
33. Построить график $y=1-|x+2|$.
34. Найти уравнение прямой проходящей через точку $A(2;3)$ и отсекающей на осях координат равные по длине отрезки.
35. Найти уравнение прямой проходящей через точку $A(3;2)$ и отсекающей на осях координат равные по длине отрезки.
36. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-x-20}{x-5}$.
37. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.
38. Построить график $y=\dfrac{(x+1)(x-3)}{|x-1|+2}$.
39. Построить график $y=\dfrac{(x-1)(x-3)}{|x-2|+1}$.
40. Найти уравнение прямых, проходящих через точку $A(0;2)$ и отсекающих прямоугольный треугольник площадью 4 с катетами, лежащими на осях координат.
41. Найти уравнение прямых, проходящих через точку $A(0;3)$ и отсекающих прямоугольный треугольник площадью 9 с катетами, лежащими на осях координат.
42. Построить график $|y|=|x-2|$.
43. Построить график $|y|=|x-1|$.
44. Найдите координаты точки, через которую проходят все прямые вида $y-2=kx-k$.
45. Найдите координаты точки, через которую проходят все прямые вида $y+2=kx+k$.
46. Известно, что парабола проходит через точку $A(-1;0,75)$, и её вершина находится в начале координат. Найдите уравнение этой параболы и вычислите, в каких точках она пересекает прямую $y=12$.
47. Постройте график $y=|x-2|+|x+1|$.
48. Прямая проходит через точку $B(2;1)$ и пересекает ось абсцисс в точке, удалённой от начала координат на 3. Напишите уравнение этой прямой.
49. Построить график функции $y=\sqrt{1-4x+4x^2}-3$.
50. Построить график функции $y=\sqrt{1+4x+4x^2}-3$.
51. При каких значениях k прямая $y=kx$ имеет единственную общую точку с графиком функции $y=(x-1)^2$?
52. При каких значениях k прямая $y=kx$ имеет единственную общую точку с графиком функции $y=(x+1)^2$?
53. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;3)$ и $B(3;7)$.
54. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;5)$ и $B(4;9)$.
55. Нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $\dfrac{(x^2-4)(y-x+1)}{x-2}=0$.
56. Нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $\dfrac{(x^2-9)(y-x+1)}{x-3}=0$.
57. При каких значениях k прямая $y=2x-3$ имеет с параболой $y=(x-k)^2$ хотя бы одну общую точку?
58. При каких значениях k прямая $y=2x+3$ имеет с параболой $y=(x-k)^2$ хотя бы одну общую точку?

59. На одном из рисунков изображён график функции $f(x) = 2(x-1)^4 + 1$. Укажите на каком и обоснуйте свой выбор.

Рис. 1

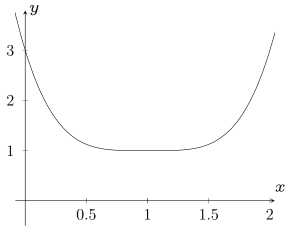


Рис. 2

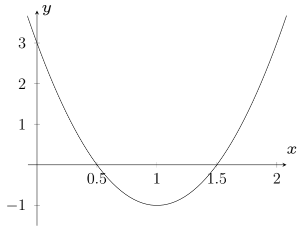


Рис. 3

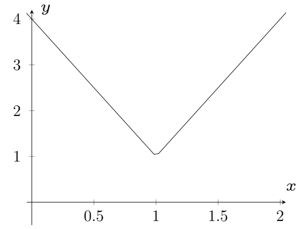
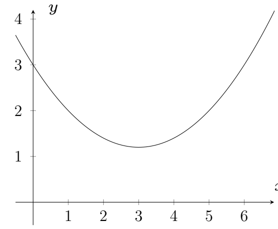


Рис. 4



60.На одном из рисунков изображён график функции $f(x) = 1 - 3(x+1)^4$. Укажите на каком и обоснуйте свой выбор.

Рис. 1

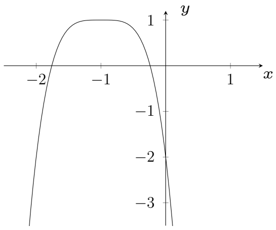


Рис. 2

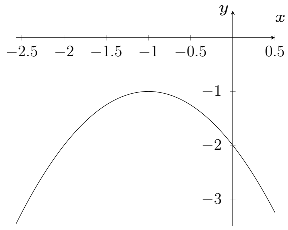


Рис. 3

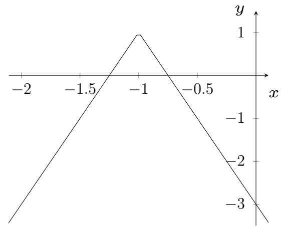
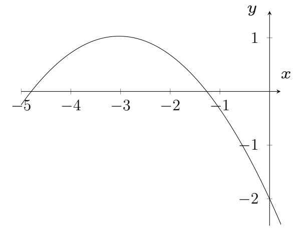


Рис. 4



61. Постройте график функции $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{|2x-2| - x}$. При каких a прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек?

62. Постройте график функции $y = \dfrac{3x^2 + 8x + 4}{|2x+2| + x}$. При каких a прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек?

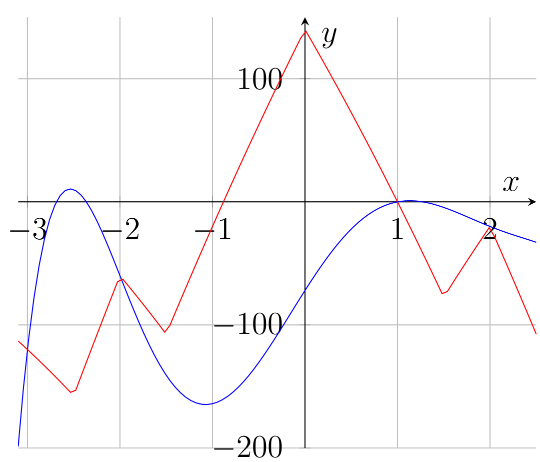
63. Вычислите площадь треугольника, ограниченного графиком функции $y = |2x - 2| - 1$ и осью абсцисс.

64. Вычислите площадь треугольника, ограниченного графиком функции $y = |2x + 2| - 1$ и осью абсцисс.

65. На координатной плоскости изображены графики функций $y = -(x^2-9)(x^2-4)(x-1)(x-2) + 10x - 10x^2$ и $y = 70|1 - 2||x| - 2|| - 10x^2 + 10x - 70$ при $x \in [-3,1; 2,5]$.

a. Установите, график какой из функций синий, а какой — красный. Ответ обоснуйте.

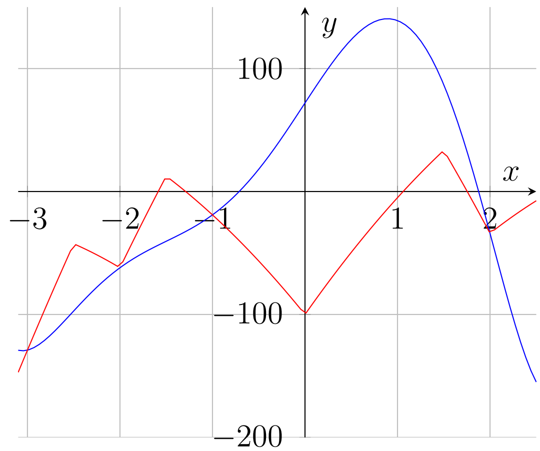
b. Решите неравенство $-(x^2-9)(x^2-4)(x-1)(x-2) + 10x - 10x^2 > 70|1-2||x|-2|| - 10x^2 + 10x - 70$ при $x \in [-3; 2,5]$ и запишите ответ (обоснование не требуется).



66. На координатной плоскости изображены графики функций $y = (x^2-9)(x^2-4)(x-1)(x-2) + 7x - 12x^2$ и $y = -50(|1 - |2|x| - 4|| - 1) + 7x - 12x^2$ при $x \in [-2,5; 3,1]$.

a. Установите, график какой из функций синий, а какой — красный. Ответ обоснуйте.

b. Решите неравенство $-50(|1-|2|x|-4||-1) + 7x - 12x^2 > (x^2-9)(x^2-4)(x-1)(x-2) + 7x - 12x^2$ при $x \in [-2,5; 3]$ и запишите ответ (обоснование не требуется).



67. а) Построить график функции $f(x) = x \cdot |4 - x|$.
б) При каких значениях параметра a уравнение $ax - 2 = x \cdot |4 - x|$ имеет ровно два решения?
68. а) Построить график функции $f(x) = x^2 - 2|x|$.
б) При каких значениях a уравнение $x^2 - 2|x| = a$ имеет ровно три решения?
69. На графике $y = x^2$ найти все точки, сумма расстояний от которых до координатных осей равна 2.
70. Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-1; 3]$ (то есть при $-1 \leqslant x \leqslant 3$).
71. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 6| \cdot (x - 4)}{3 - x}$.
а) Постройте график данной функции.
б) укажите все значения параметра p, при которых количество корней уравнения $f(x) = p$ чётно.
72. а) Постройте график функции $f(x) = (x + 1)|x - 1|$.
б) Укажите промежутки возрастания, промежутки, где функция принимает положительные значения, и те значения c, при которых уравнение $f(x) = c$ имеет три решения.
73. На графике функции $y = 3x^2$ найдите все точки, расстояние от которых до прямой $y = x - 2$ равно $2\sqrt{2}$.
74. Найдите значения параметров a, b, c такие, что точка $A(0; 4)$ лежит на параболе $y = ax^2 + bx + c$, а точка $N(-1; 6)$ — вершина этой параболы.
75. Постройте график функции $y = \sqrt{(1 - 2x)^2} - 3$ и найдите радиус окружности, описанной около треугольника, отсекаемого осью Ox от этого графика.
76. Найдите уравнения всех прямых, которые проходят через начало координат и имеют единственную общую точку с графиком функции $y = (x - 1)^2$.
77. Найдите все значения b такие, что функция $y = bx^2 - 6x + 3$ имеет наименьшее значение, и это значение меньше, чем 2,5.
78. Парабола $y = x^2 + 6x + c$ пересекает ось Oy в точке с ординатой -10. Найдите наименьшее возможное значение a, при котором прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с этой параболой.
79. Изобразите множество точек $(x; y)$ координатной плоскости, для каждой из которых выполняется условие $\dfrac{x^2 + y - 2}{x + 3} = 0$. Укажите в этом множестве все точки, равноудалённые от осей координат. Ответ полностью обоснуйте.
80. Построить на одном чертеже графики функций а) $y = |x - 2|$, б) $y = x^2$.
Указать точки пересечения обоих графиков с осями координат и между собой, если такие точки существуют.
81. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y = ax^2 - ax$ и $y = ax - 4$ не пересекаются.
82. Постройте график функции $y = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}(x^2 - 4)$.

83. Постройте график $y = \left|\dfrac{2-x}{4}\right|$.
При каких значениях аргумента выполняется неравенство $-1 \leqslant y < 1$?
84. Постройте график $y = \left|\dfrac{3+x}{6}\right|$.
При каких значениях аргумента выполняется неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 2$?
85. Парабола с вершиной в точке $A(0;3)$ проходит через точку $B(6;15)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?
86. Парабола с вершиной в точке $C(0;5)$ проходит через точку $B(4;-3)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?
87. При каком k графики функций $y = x^2 - 2x + 239$ и $y = k$ пересекаются в одной точке?
88. При каком k графики функций $y = x^2 + 2x - 239$ и $y = k$ пересекаются в одной точке?
89. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $y = 2x - 1$.
90. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $y = -2x + 1$.

3.7 Стандартные задачи.

К стандартным будут отнесены все те задачи, которые уже встречались в 7 классе: задачи на движение, совместную работу, проценты, составление систем уравнений. Отличие заключается только в том, что получившиеся уравнения могут быть квадратными. Методы составления уравнений (и таблиц) остаются прежними.

Задачи. О способах решения задач можно почитать в разделе для 7 класса.

1. При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 2 ч 55 мин. За сколько времени мог бы очистить пруд каждый насос, работая отдельно, если один из них может эту работу выполнить на 2 ч быстрее другого?

2. За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $\dfrac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором в отдельности, если первым трактором это можно сделать на 5 дней быстрее, чем вторым?

3. Положительное число a составляет 200% от своего квадрата. Найдите число a.

4. Положительное число a составляет 400% от своего квадрата. Найдите число a.

5. Товар первоначально стоил a рублей. Затем он подорожал на 10%, а потом ещё на 15%. На сколько процентов от первоначальной стоимости подорожал товар?

6. Товар первоначально стоил a рублей. Затем он подорожал на 15%, а потом ещё на 10%. На сколько процентов от первоначальной стоимости подорожал товар?

7. Путь от города до посёлка автомобиль проезжает за 2,5 часа. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он проедет путь на 15 км больше, чем расстояние от города до посёлка. Найти расстояние от города до посёлка.

8. Из Москвы в Санкт-Петербург выехал автобус. Спустя час вслед за ним вышла легковая машина, скорость которой на 20 км/ч больше скорости автобуса. Машина обогнала автобус и через 5 часов после своего выхода находилась впереди него на 70 км. Найти скорость автобуса.

9. Саша и Стас вскапывают грядку за 10 минут, а один Стас за 15 минут. За сколько минут Саша один вскопает грядку?

10. Таня и Лена пропалывают грядку за 12 минут, а одна Лена за 20 минут. За сколько минут прополет грядку одна Таня?

11. На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 минут. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине её можно сделать на 15 минут быстрее, чем на второй?

12. На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 20 минут. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине её можно сделать на 30 минут быстрее, чем на второй?

13. Комната с размерами 4 метра и 6 метров составляет 75% от всей квартиры. Найдите площадь квартиры.

14. Комната с размерами 3 метра и 4 метра составляет 60% от всей квартиры. Найдите площадь квартиры.

15. Из A и B одновременно выехали 2 автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 16 км/ч больше скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

16. Из A и B одновременно выехали 2 автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 33 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 22 км/ч больше скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

17. Товар стоил a рублей. Потом он подорожал на 10%. После чего подешевел на 10% от новой цены. Сколько стал стоить товар после удешевления?

18. Товар стоил a рублей. Потом он подешевел на 10%. После чего подорожал на 10% от новой цены. Сколько стал стоить товар после подорожания?
19. Пароход прошёл 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 час. Найти скорость парохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
20. Пароход прошёл 9 км по озеру и 16 км против течения реки за 1 час. Найти скорость парохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
21. Велосипедист проехал за 2,5 часа 58 км, а за следующий час ещё 19 км. Найдите среднюю скорость велосипедиста.
22. Велосипедист проехал за 1,5 часа 36 км, а за следующие 2 часа ещё 34 км. Найдите среднюю скорость велосипедиста.
23. Рубашка на 20% дешевле пиджака. На сколько процентов пиджак дороже рубашки?
24. Из Санкт-Петербурга в Псков выехал автомобиль Москвич со скоростью 60 км/ч. В то же время навстречу ему из Пскова выехал автомобиль Жигули со скоростью 80 км/ч. Какое расстояние было между ними за час до встречи?
25. Сколько граммов воды надо добавить к 180 граммам сиропа, содержащего 25% сахара, чтобы получить сироп, процентное содержание сахара в котором равно 20%?
26. Сколько граммов воды надо добавить к 220 граммам сиропа, содержащего 25% сахара, чтобы получить сироп, процентное содержание сахара в котором равно 20%?
27. Цена билета на стадион была 150 рублей. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. Найти новую цену билета.
28. Цена билета на стадион была 120 рублей. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. Найти новую цену билета.
29. Одновременно из пункта А в одном направлении выехали два мотоциклиста: скорость одного из них 75 км/ч, а скорость второго 60 км/ч. Через 20 минут вслед за ними из пункта А выехал третий мотоциклист. Найдите скорость третьего мотоциклиста, если известно, что он догнал первого мотоциклиста на 1 час позже, чем второго. Ответ дайте в километрах в час.
30. Турист проплыл на байдарке 25 км по озеру и 9 км против течения реки за столько же времени, за сколько он проплыл бы по течению той же реки 56 км. Найдите скорость байдарки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.
31. Одновременно из пункта А в одном направлении выехали два велосипедиста: скорость одного из них 15 км/ч, а скорость второго 12 км/ч. Через 20 минут вслед за ними из пункта А выехал третий велосипедист. Найдите скорость третьего велосипедиста, если известно, что он догнал первого велосипедиста на 1 час позже, чем второго. Ответ дайте в километрах в час.
32. Турист проплыл на байдарке 15 км по озеру и 9 км против течения реки за столько же времени, за сколько он проплыл бы по течению той же реки 42 км. Найдите скорость байдарки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.
33. Торговая база закупила партию альбомов и поставила её магазину по оптовой цене на 130% выше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 5% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 40%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрёл альбом за 57,96 рубля?
34. Торговая база закупила партию альбомов и поставила её магазину по оптовой цене на 20% выше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 110% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 30%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрёл альбом за 123,48 рубля?
35. Торговая база закупила партию альбомов и поставила её магазину по оптовой цене на 5% выше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 120% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 40%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрёл альбом за

69,3 рубля?

36. Торговая база закупила партию альбомов и поставила её магазину по оптовой цене на 110% выше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 5% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 30%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрёл альбом за 92,61 рубля?

37. В банк 01.01.2014 г. положили 50000 р. 31 декабря каждого года банк увеличивает вклад на одно и то же число процентов. На какое число процентов ежегодно увеличивается вклад, если 01.01.2016 г. вклад составил 55125 р.?

38. В банк 01.01.2014 г. положили 2000 р. 31 декабря каждого года банк увеличивает вклад на одно и то же число процентов. На какое число процентов ежегодно увеличивается вклад, если 01.01.2016 г. вклад составил 2420 р.?

39. Один км от дома до остановки автобуса Петя проходит за 15 мин. Следующие 7 км на автобусе он проезжает за 12 мин. Затем 2 км от остановки до школы мальчик пробегает за 13 мин. Какова средняя скорость Пети в школу?

40. Спортсмен-триатлонист сначала проплыл 1 км за 15 мин, потом пробежал 10 км за 50 мин, затем проехал на велосипеде 29 км за 55 мин. Какова средняя скорость спортсмена?

41. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 3 минуты быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходит круг?

42. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 5 минут быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходит круг?

43. Свежий виноград содержит 80% влаги, а сушёный виноград (изюм) — 5%. Сколько требуется свежего винограда для приготовления 1 кг изюма?

44. Винни Пух и Пятачок могут изготовить подарок ослику Иа-Иа за 8 дней. Определите, за сколько дней Пятачок изготовит этот подарок, работая отдельно, если известно, что он сделает это на 12 дней быстрее, чем Винни.

45. Малыш и Карлсон вместе съедают банку варенья за 12 минут. Определите, за сколько минут справится с банкой варенья Карлсон, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем Малыш.

46. Из Петербурга в Москву одновременно отправились курьер и гонец. Курьер проехал с постоянной скоростью весь путь. Гонец проехал первую половину пути со скоростью 102 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 17 км/ч меньшей скорости курьера, в результате чего прибыл в Москву одновременно с курьером. Известно, что скорость курьера меньше 60 км/ч. Найдите скорость курьера.

47. Из Москвы в Петербург одновременно выехали генерал и чиновник. Генерал проехал с постоянной скоростью весь путь. Чиновник проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости генерала на 13 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в Петербург одновременно с генералом. Найдите скорость генерала, если известно, что она больше 48 км/ч.

48. После того, как рабочий увеличил производительность своего труда на 16%, он сократил на 1 час время выполнения задания. Сколько времени теперь он стал тратить на выполнение этого задания?

49. Смешали 30 г 20%-го раствора соли с 10 г другого раствора и получили раствор с концентрацией соли 25%. Определить концентрацию соли во втором растворе.

50. Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 минут при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 минут на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.

51. Численность волков в двух заповедниках составляла 210 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков выросла на 10%, а во втором — на 30%. В результате общая численность волков в этих двух заповедниках составила 251 особь. Сколько волков было в каждом из двух заповедников первоначально?

52. Сколько граммов четырёхпроцентного и сколько граммов девятипроцентного растворов соли необходимо взять, чтобы получить 250 граммов её шестипроцентного раствора?

53. Некоторый товар стоил 1000 рублей, но не пользовался спросом. Поэтому его цена дважды снижалась на 40% и один раз на 20%. Сколько стал стоить этот товар после последнего снижения цены?

54. Некоторый товар стоил 1000 рублей, но не пользовался спросом. Поэтому его цена дважды снижалась на 20% и один раз на 60%. Сколько стал стоить этот товар после последнего снижения цены?

55. Мотоциклист задержался с выездом на 9 минут. Чтобы наверстать потерянное время, он увеличил намеченную скорость на 10 км/ч. С какой скоростью ехал мотоциклист, если весь путь равен 30 км?

56. Петя вышел из школы и пошёл домой со скоростью 4,5 км/ч. Через 20 минут по той же дороге из школы выехал Вася на велосипеде со скоростью 12 км/ч. На каком расстоянии от школы Вася догонит Петю?

57. Нина поехала на велосипеде на рынок со скоростью 15 км/ч. Через 6 минут по той же дороге поехал на мопеде её брат со скоростью 40 км/ч. На каком расстоянии от дома брат догонит Нину?

58. Сколько граммов 15%-ного раствора соли надо добавить к 50 г 60%-ного раствора соли, чтобы получить 40%-ный раствор соли?

59. Сколько граммов 75%-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%-ного раствора кислоты, чтобы получить 50%-ный раствор кислоты?

60. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны 70 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 1400 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 3 минутам.

61. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны 75 км/ч и 45 км/ч. Длина товарного поезда равна 800 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 2 минутам.

62. В сосуд, содержащий 7 литров 14-процентного раствора некоторого вещества, добавили 21 литр воды. Сколько процентов составляет концентрация полученного раствора?

63. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация полученного раствора?

3.8 Нестандартные задачи

Для успешного решения нестандартных задач во вступительной работе 8 класса рекомендуется повторить те же темы, что и в 7 классе, и ещё несколько, которые будут рассмотрены отдельно.

Выделение целой части. Если в задаче необходимо исследовать некоторую алгебраическую дробь, то удобно выделять из неё целую часть при помощи почленного деления. Приведём два типовых примера.

Пример 1. При каких целых n выражение $\dfrac{2n+3}{n-2}$ будет целым числом?

Преобразуем дробь следующим образом: $\dfrac{2n+3}{n-2} = \dfrac{2n-4+7}{n-2} = 2 + \dfrac{7}{n-2}$. Теперь видно, что для выполнения условия задачи необходимо, чтобы число 7 делилось на $n-2$. Семь является простым числом, так что вариантов немного, однако не следует забывать об отрицательных числах: $n-2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, поэтому $n \in \{-5; 1; 3; 9\}$.

Пример 2. При каком значении x дробь $\dfrac{6x^2+4x+5}{3x^2+2x+1}$ достигает своего наибольшего значения?

Аналогично выделим целую часть: $\dfrac{6x^2+4x+5}{3x^2+2x+1} = \dfrac{6x^2+4x+2+3}{3x^2+2x+1} = 2 + \dfrac{3}{3x^2+2x+1}$. Всё, на что мы можем влиять, это знаменатель прибавляемой дроби: чем он меньше, тем больше дробь и как следствие всё выражение. Этот знаменатель является квадратичной функцией с положительным старшим коэффициентом, а значит достигает своего наименьшего значения в вершине $x = -\dfrac{1}{3}$. При этом заметим, что это значение положительно, иначе задание не имело бы смысла: ведь если бы знаменатель мог бы быть равен нулю, дробь росла бы неограниченно.

Уравнения в целых числах. Если у уравнении дано, что числа целые или натуральные, то становится возможно решить одно уравнение с двумя и более неизвестными.
Пример 1. Решите в натуральных числах уравнение $(x-1)(y-2) = 5$. Так как 5 — простое число, вариантов немного: $x-1 = 5$, $y-2 = 1$ или $x-1 = 1$, $y-2 = 5$, таким образом $x = 6$, $y = 3$ или $x = 2$, $y = 7$.
Пример 2. Решите в целых числах уравнение $ab - 4a - 3b = 1$. Это уравнение несколько сложнее, так как оно изначально не разложено на множители. Чтобы его разложить, надо подумать: какие скобки необходимо перемножать, чтобы получить те слагаемые, которые находятся в правой части? Это скобки $(a-3)$ и $(b-4)$. Но при их перемножении появится слагаемое 12, которое необходимо прибавить и к правой части: $ab-4a-3b+12 = 1+12$, $(a-3)(b-4) = 13$. Отсюда получаем 4 варианта (так как числа в данном случае могут быть и отрицательными): $(16; 5)$, $(4; 17)$, $(2; -9)$, $(-10; 3)$.

Комбинаторное правило умножения. Это правило состоит в следующем: если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами. Например, если у нас имеется 2 блюдца и 3 чашки, из них можно составить 6 сервизов.

Определение вероятности. Сложных задач на теорию вероятностей во вступительных не бывает, но определение знать надо: чтобы найти вероятность некоторого события, надо разделить количество подходящих случаев на количество всех возможных. Например, вероятность того, что на игральной кости выпадет число, кратное трём, равна $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Задачи. При решении этих задач по-прежнему немаловажную роль играет умении грамотно составлять уравнения, в дополнении к этому появилось несколько разобранных выше типовых методов.

1. Наибольший общий делитель целых чисел a и b равен 1. Доказать, что НОД(a, a+b)=1.
2. Наибольший общий делитель целых чисел a и b равен 1. Доказать, что НОД(a, a-b)=1.
3. Найдите все натуральные n, при которых число $\dfrac{3n-1}{n+1}$ является целым.
4. Найдите все натуральные n, при которых число $\dfrac{3n+1}{n-1}$ является целым.
5. В магазине продаются раки: маленькие — по 5 рублей, большие — по 7 рублей. Сколько маленьких и больших раков можно купить на 101 рубль ровно?
6. В магазине продаются раки: маленькие — по 5 рублей, большие — по 8 рублей. Сколько маленьких и больших раков можно купить на 116 рублей ровно?
7. При каких целых n число $\dfrac{4n-5}{2n-1}$ будет целым?
8. При каких целых n число $\dfrac{4n+5}{2n+1}$ будет целым?
9. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом семиугольнике?
10. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике?
11. Найти наибольшее двузначное натуральное число n такое, что $\dfrac{3n+17}{n+4}$ — сократимая дробь.
12. Найти наибольшее двузначное натуральное число n такое, что $\dfrac{3n+16}{n+4}$ — сократимая дробь.
13. На столе лежат книги, число которых меньше 100. Сколько лежит книг, если их можно без остатка связать в пачки как по 3, так и по 4 и по 5 книг?
14. На столе лежат книги, число которых меньше 100. Сколько лежит книг, если их можно без остатка связать в пачки как по 3, так и по 4 и по 7 книг?
15. Решить уравнение в целых числах: $2x^2 + xy = x + 7$.
16. Решить уравнение в целых числах: $x^2 - 3xy = x - 3y + 2$.
17. Найдите наименьшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 22.
18. Найдите наименьшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 23.
19. «Зенит», «Спартак» и ЦСКА стали призёрами первенства России по футболу. Сколькими способами они могут расположиться на первых трёх местах?
20. Сколькими способами можно раздать яблоко, мандарин и грушу Пете, Саше и Гале так, чтобы каждому досталось по одному фрукту?
21. Пусть a — чётное число, не кратное 6. Найти остаток от деления числа a^2 на 12.
22. Пусть a — целое число, не кратное 3. Найти остаток от деления числа a^2 на 3.
23. Число n при делении на 5 даёт в остатке 4. Найти остаток от деления числа $(4n+3)$ на 5.
24. Число n при делении на 4 даёт в остатке 3. Найти остаток от деления числа $(3n+2)$ на 4.
25. Сколько двузначных чисел делятся без остатка на 4 и на 6?
26. Сколько двузначных чисел делятся без остатка на 6 и на 9?
27. Решить уравнение $x^{1024} + 1 = \dfrac{1}{2 + x^{318}}$.
28. Решить уравнение $x^{1024} + 2 = \dfrac{1}{1 + x^{318}}$.
29. Решить в целых числах $x \cdot (y-2) = 3$, если известно, что $x < 0$.
30. Решить в целых числах $x \cdot (y-4) = 3$, если известно, что $x < 0$.
31. Из Петербурга в Москву можно проехать двумя способами, а из Москвы в Братск четырьмя способами. Сколькими способами можно проехать из Петербурга в Братск?
32. Из Петербурга в Москву можно проехать двумя способами, а из Москвы в Хабаровск пятью способами. Сколькими способами можно проехать из Петербурга в Хабаровск?
33. В шахматном турнире принимают участие 7 игроков. Сколько нужно сыграть игр, чтобы каждый шахматист сыграл с каждым?
34. В январе было 5 понедельников. Какое наибольшее число четвергов могло быть в этом январе?

35. В марте было 5 вторников. Какое наибольшее число пятниц могло быть в этом марте?
36. В кубе с ребром 10 см все грани покрасили в разные цвета. Затем куб разрезали на 1000 кубиков со стороной в 1 см. Сколько получилось кубиков, у которых ровно две грани окрашены в разные цвета?
37. В кубе с ребром 1 м все грани покрасили в разные цвета. Затем куб разрезали на 1000 кубиков со стороной в 10 см. Сколько получилось кубиков, у которых ровно две грани окрашены в разные цвета?
38. В карточной колоде 36 карт, по девять каждой масти. Мы берём двух королей. Сколько различных пар мы можем получить?
39. В карточной колоде 36 карт, по девять каждой масти. Мы берём двух валетов. Сколько различных пар мы можем получить?
40. Наименьшее общее кратное чисел a и b равно $\frac{ab}{3}$. Найдите их наибольший общий делитель.
41. Наименьшее общее кратное чисел a и b равно $\frac{ab}{5}$. Найдите их наибольший общий делитель.
42. На окружности взяли 7 точек и провели через них всевозможные хорды. Сколько всего хорд провели?
43. На окружности взяли 6 точек и провели через них всевозможные хорды. Сколько всего хорд провели?
44. Произвольному многочлену $P(x)$ ставится в соответствие многочлен $P'(x)$ так, что выполнялись следующие правила:
1. Для любых двух многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x) : (P_1(x) + P_2(x))' = P_1'(x) + P_2'(x)$;
2. Для любого числа a и многочлена $P(x) : (a \cdot P(x))' = a \cdot P'(x)$;
3. Если $P(x) = x^n$, то $P'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
Найдите $P'(x)$, если:
а) $P(x) = 3x^5 + 4x^3$;
б) $P(x) = 1$ для любого x, т.е. $P(x) \equiv 1$;
в) $P(x) = (T'(x) + 3xT(x))' - 18x^2 - 45x^4$, где $T(x) = 3x^4 - 2x^2$.
45. Произвольному многочлену $P(x)$ ставится в соответствие многочлен $P'(x)$ так, что выполнялись следующие правила:
1. Для любых двух многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x) : (P_1(x) + P_2(x))' = P_1'(x) + P_2'(x)$;
2. Для любых двух многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x) : (P_1(x) \cdot P_2(x))' = P_1'(x) \cdot P_2(x) + P_1(x) \cdot P_2'(x)$;
3. Для любого числа a и многочлена $P(x) : (a \cdot P(x))' = a \cdot P'(x)$;
4. Если $P(x) = x$, то $P'(x) = 1$.
5. Если $P(x) = x^3$, то $P'(x) = 3 \cdot x^2$.
а) Найдите $P'(x)$, если $P(x) = 3x^3 + 4x$;
б) Найдите $P'(x)$, если $P(x) = x^6 - 2x^4$;
в) Найдите $P(x)$, если $P(x) = (T(x) + 3xT(x))' - 9x^2 - 36x^3$, где $T(x) = 3x^3 - 2x$.
46. Сколько трёхзначных нечётных чисел можно составить из цифр 0, 1, 4, 5, если цифры числа могут повторяться?
47. Сколько трёхзначных чётных чисел можно составить из цифр 0, 1, 4, 5, если цифры числа могут повторяться?
48. Бросаются 2 игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10.
49. Бросаются 2 игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4.
50. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причём каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?
51. В шахматном турнире принимали участие 14 шахматистов, причём каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?
52. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день — 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если поря-

док докладов определяется жеребьёвкой?
53. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 20 докладчиков, в третий день — 10. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьёвкой?
54. Остаток от деления числа a на 3 равен 1. Найти остаток от деления числа a^2 на 3.
55. Остаток от деления числа a на 5 равен 1. Найти остаток от деления числа a^2 на 5.
56. Введём новое число $\ni$, такое, что $\ni^2 = -1$, а все остальные арифметические операции с ним и другими числами происходят как обычно. Говорят, что выражение имеет *не раздражающий* вид, если оно имеет вид $a + b \cdot \ni$, где a и b вещественные числа.

Запишите в *не раздражающем* виде следующее выражение:

$$(4 \cdot \ni - 1) \cdot (4 \cdot \ni + 1) - 17 \cdot \ni \cdot (\ni - 2).$$

57. Введём новое число $\ni$, такое, что $\ni^2 = -1$, а все остальные арифметические операции с ним и другими числами происходят как обычно. Говорят, что выражение имеет *не раздражающий* вид, если оно имеет вид $a + b \cdot \ni$, где a и b вещественные числа.

Запишите в *не раздражающем* виде следующее выражение:

$$(3 \cdot \ni - 1) \cdot (3 \cdot \ni + 1) - 10 \cdot \ni \cdot (\ni - 2).$$

58. Числитель дроби $\dfrac{k}{n}$ (здесь k и n — натуральные числа) увеличили на 1, а её знаменатель — на 2. Выясните, будет ли полученная дробь меньше или же больше исходной.
59. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 3}$.
60. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 3}$.
61. Красные карандаши стоят 17 руб за штуку, синие — 13 руб. Нужно купить карандаши на сумму 495 рублей, причём число красных не должно отличаться от числа синих более чем на 5 штук.
а) Можно ли купить 32 карандаша? (ответ обосновать)
б) Можно ли купить 35 карандашей? (ответ обосновать)
в) Какое наибольшее количество карандашей можно купить при таких условиях? (ответ обосновать)
62. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 4x + 5}$.
63. Натуральные числа a и b таковы, что $19a = 97b$. Докажите, что их сумма $(a + b)$ делится на 116.
64. Найдите $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}$, если $a + b + c = 7$ и $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{7}{10}$.
65. Найдите все целые значения n таких, что $\sqrt{n^2 - 17}$ — целое число.
66. Найдите количество различных делителей числа $6^{15} \cdot 21^7$.
67. Если между цифрами двузначного числа a вписать это же число, то полученное четырёхзначное число будет в 99 раз больше этого двузначного числа. Найдите двузначное число a.
68. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 4?
69. Найдите наибольшее двузначное число n при котором остаток от деления числа 3^n на 7 равен 5, если такое число n существует.
70. При каких натуральных m и n выполнено равенство $\dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{n-1} = 3$?
71. При каких натуральных m и n выполнено равенство $\dfrac{2}{m-1} + \dfrac{1}{n} = 3$?
72. Найдите все целые значения n, при каждом из которых значение выражения $\dfrac{12n + 70}{4n + 11}$ является

целым числом.

73. Найдите все целые значения n, при каждом из которых значение выражения $\dfrac{15n+58}{5n+9}$ является целым числом.

74. Значение выражения $ax^2+by^2+cz^2$ при $x=5$, $y=-3$, $z=-2$ равно 16. Найдите значение данного выражения при $x=\dfrac{25}{4}$, $y=-\dfrac{15}{4}$, $z=-\dfrac{5}{2}$.

75. Значение выражения $ax^2+by^2+cz^2$ при $x=4$, $y=-3$, $z=2$ равно 4. Найдите значение данного выражения при $x=10$, $y=-\dfrac{15}{2}$, $z=5$.

3.9 Геометрия

По сравнению с 7 классом, полезных фактов и различных приёмов в задачах по геометрии становится значительно больше, здесь мы сгруппируем и перечислим их все.

Площадь треугольника. Площадь треугольника вычисляется по следующей формуле: $S = \frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b = \frac{1}{2}h_c \cdot c$, где h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам. Площадь можно посчитать любым из трёх способов. Также площадь треугольника можно вычислить по **формуле Герона:** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр и по формуле $S = rp$, где r — радиус вписанной окружности. Площадь прямоугольного треугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{ab}{2}$, где a и b — его катеты. Формулы для площадей других фигур будут приведены в соответствующих разделах.

Подобие треугольников. Подобными называются треугольники, углы у которых соответственно равны, а стороны соответственно пропорциональны. Перечисли все три признака подобия треугольников.
Первый признак. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.
Второй признак. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
Третий признак. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.
Отметим следующее свойство: площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Новые свойства треугольников. Здесь будут перечислены те факты, которые не были известны в 7 классе.
1. Средняя линия треугольника (отрезок, соединяющий середины двух его сторон) параллельна основанию (третьей стороне) и равен его половине.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $2:1$ считая от вершины.
3. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (центр вписанной окружности).
4. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центр описанной окружности).
5. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
6. Медиана треугольника делит его на два равновеликих (равных по площади).
7. Биссектриса треугольника делит сторону, к которой проведена, на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Далее перечислим новые факты о прямоугольных треугольниках.
1. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных, каждый из которых подобен данному треугольнику.
2. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.
3. Катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.
4. **Теорема Пифагора.** Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.
5. **Обратная теорема Пифагора.** Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным.

6. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника — середина его гипотенузы.

Паралеллограмм. Параллелограмм — четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Перечислим его свойства и признаки.
Свойства:
1. Противолежащие стороны параллелограмма равны.
2. Противолежащие углы параллелограмма равны.
3. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
4. Каждая из диагоналей делит параллелограмм на два равных треугольника.
Признаки:
1. Если у четырёхугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то он является параллелограммом.
2. Если у четырёхугольника противоположные углы попарно равны, то он является параллелограммом.
3. Если у четырёхугольника противоположные сумма соседних углов равна 180 градусов, то он является параллелограммом.
Площадь параллелограмма вычисляется по формуле $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, где h_a и h_b — высоты, проведённые к соответствующим сторонам.

Трапеция. Трапеция — четырёхугольник с двумя параллельными и двумя непараллельными сторонами. Трапеции бывают равнобедренными (боковые стороны равны), прямоугольными (два угла при одной из боковых сторон равны 90°) или не теми, ни другими.

Перечислим некоторые свойства, справедливые для всех видов трапеций:
1. Средняя линия трапеции (отрезок, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме.
2. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений её боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
3. Диагонали трапеции делят её на две пары треугольников, в одной из которых треугольники подобны, а в другой — равновелики.
4. Если трапеция вписанная, то она равнобедренная.
Отметим, что трапеция также является равнобедренной, если углы при любом из оснований равны (а по определению должны быть равны боковые стороны). Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$, где h — высота трапеции, а a и b — её основания.

У трапеции есть несколько стандартных дополнительных построений:
1. Опустить одну или две высоты.
2. От одной из вершин отложить отрезок, параллельный противоположной боковой стороне и равный ей. Если отрезок откладывается внутрь, то от трапеции отсекается параллелограмм, а если наружу — трапеция достраивается до параллелограмма.
3. Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, имеет смысл продлить боковые стороны до пересечения, получив при пересечении прямой угол. Далее обычно следует воспользоваться вторым из приведённых здесь свойств.
4. Через одну из вершин провести прямую, параллельную не проходящей через эту вершину диагонали.

Прямоугольник. Четырёхугольник, у которого все углы прямые, называется прямоугольником. Очевидно, прямоугольник является параллелограммом. а поэтому наследует все его свойства. Отметим только одно новое свойство: у прямоугольника равны диагонали. Этот же факт является его признаком: если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$.

Ромб. Ромб — это параллелограмм, все стороны которого равны. У него есть два новых свойства:
1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
Можно также признаки ромба: параллелограмм является ромбом, если
1. Две его смежные стороны равны.
2. Его диагонали перпендикулярны.
3. Одна из диагоналей делит содержащие её углы пополам.

Площаь ромба можно найти либо так же, как и параллелограмма, либо по формуле $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, где d_1 и d_2 — его диагонали.

Квадрат. Квадрат — это одновременно и ромб, и прямоугольник. Поэтому его свойства — это все свойства этих двух фигур (напомним. что они также имеют свойства параллелограмма). Площадь квадрата вычисляется по формуле $S = a^2$.

Окружности. Соберём все факты об отрезках, углах, дугах и фигурах, связанных с окружностями.
1. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны.
2. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому к точке касания.
3. Произведение длин отрезков секущей равно квадрату длины отрезка касательной, проведённой из той же точки.
4. Равные хорды стягивают равные дуги.
5. Если две хорды окружности, AB и CD пересекаются в точке M, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. 6. Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.
7. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
8. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается (на диаметр опирается прямой угол).
9. Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.
10. Угол между хордами равен полусумме дуг, на которые он опирается.
11. Угол, находящийся вне окружности, равен полуразности дуг, на которые опирается.
12. Первый критерий (признак и свойство) вписанного в окружность четырёхугольника: сумма противоположных углов равна $180°$.
13. Второй критерий (признак и свойство) вписанного в окружность четырёхугольника: угол, образованный стороной и диагональю, равен углу, образованному противоположной стороной и другой диагональю.
14. Критерий описанного четырёхугольника: суммы длин противоположных сторон равны.
15. Точка касания двух окружностей лежит на одной прямой с их центрами.

Тригонометрия. В 8 классе проходят только базовые сведения: определения тригонометрических функций и основной тригонометрическое тождество. Будем считать, что дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.
1. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AB}$, $\sin(\angle B) = \frac{AC}{AB}$.
2. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos(\angle A) = \frac{AC}{AB}$, $\cos(\angle B) = \frac{BC}{AB}$.

3. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему: $tg(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$, $tg(\angle B) = \dfrac{AC}{BC}$.
4. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему: $ctg(\angle A) = \dfrac{AC}{BC}$, $ctg(\angle B) = \dfrac{BC}{AC}$.
5. **Основное тригонометрическое тождество:** $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ для любого угла x.

Отсюда можно вывести несколько соотношений: $tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $tg(x) \cdot ctg(x) = 1$. Заметим, что основное тригонометрическое тождество позволяет зная одну из тригонометрических функций, найти все остальные.

Также необходимо знать тригонометрические функции некоторых углов, приведём их в таблице.

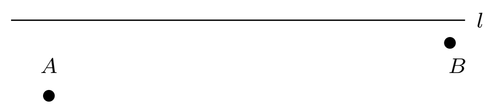
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Вектора. Вектора во вступительных работах практически не встречаются, но лучше знать о векторах хотя бы определение и правило параллелограмма для сложения векторов. Об этом можно прочитать в учебника Атанасяна.

Задачи. Все задачи можно решить, используя приведённые здесь факты как за 8, так и за 7 класс. Некоторые задачи требуют придумать дополнительное построение.
1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) диагонали пересекаются в точке O. Доказать, что $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.
2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взяты произвольные точки M и K так, что отрезки DM и AK пересекаются в точке O. Доказать, что $S_{\Delta AOM} = S_{\Delta KOD}$.
3. На каждой медиане равностороннего треугольника ABC взята точка, делящая её в отношении $1:3$, считая от вершины. Указанные точки обозначим A_1, B_1, C_1. Найти отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.
4. На каждой медиане равностороннего треугольника ABC взята точка, делящая её в отношении $1:4$, считая от вершины. Указанные точки обозначим A_1, B_1, C_1. Найти отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.
5. В прямоугольном треугольнике ABC медиана $CM = 12$ см, а расстояние от середины катета AC до гипотенузы AB равно 3 см. Найдите площадь треугольника ABC.
6. В прямоугольном треугольнике ABC медиана $CM = 8$ см, а расстояние от середины катета AC до гипотенузы AB равно 2 см. Найдите площадь треугольника ABC.
7. Средняя линия трапеции делится двумя диагоналями на три равные части. Найти отношение между основаниями трапеции.
8. Средняя линия трапеции равна 8 см и делится диагональю на два отрезка, разность между которыми равна 2 см. Найти основания трапеции.
9. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведённая к боковой стороне, равна 9 см. Найти основание треугольника.
10. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Основание равно 8 см. Найти длину высоты, проведённой к боковой стороне.
11. Найти площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол 135°.
12. Найти площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 4 см, а меньший

угол 45°.
13. Найти углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.
14. Найти углы ромба, если его диагонали равны $4\sqrt{3}$ и 4.
15. К окружности проведены касательная и секущая, проходящая через центр окружности. Длина касательной в два раза меньше длины секущей. Найти отношение длины касательной к длине радиуса.
16. К окружности проведены касательная и секущая, проходящая через центр окружности. Длина касательной в три раза меньше длины секущей. Найти отношение длины радиуса окружности к длине касательной.
17. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причём $BM : MC = 3 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.
18. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причём $BM : MC = 3 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.
19. На прямой l найдите точку C такую, чтобы сумма расстояний $AC + BC$ была наименьшей.

20. На прямой l найдите точку C такую, чтобы сумма расстояний $AC + BC$ была наименьшей.



21. Дан $ABCD$ — прямоугольник. $AB = 8$, $BC = 4$. На сторонах AB и CD отмечены точки K и P соответственно так, что $AK : AB = CP : CD = 3 : 8$.
а) Докажите, что $KBPD$ — ромб.
б) Найдите его периметр и площадь.
22. Две окружности, радиусы которых равны 8 и 2, касаются внешним образом. AB — их общая внешняя касательная (A и B — точки касания). Найдите длину отрезка AB.
23. В треугольнике ABC угол B равен 80°. M — точка пересечения биссектрис углов A и C. Найти угол AMC.
24. В треугольнике ABC угол B равен 100°. M — точка пересечения биссектрис углов A и C. Найти угол AMC.
25. Найти диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27см^2.
26. Найти диагонали ромба, если одна из них в 2,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 20см^2.
27. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 5$, $BC = 13$, $CD = 9$, $DA = 15$ и $AC = 12$.
28. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 12$, $BC = 8$, $CD = 17$, $DA = 9$ и $BD = 15$.
29. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 36см и 100см. Найти радиус круга.
30. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 32см и 50см. Найти радиус круга.
31. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части 48см и 3см, а другая — пополам. Найти длину второй хорды.
32. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части 16см и 4см, а другая — пополам. Найти длину второй хорды.

33. Два угла равнобедренного треугольника пропорциональны числам 2 и 5. Найдите все углы треугольника.
34. Два угла равнобедренного треугольника пропорциональны числам 1 и 4. Найдите все углы треугольника.
35. Две стороны треугольника равны 2 и 4. Какие значения может принимать третья сторона, если её длина — целое число?
36. Две стороны треугольника равны 2 и 5. Какие значения может принимать третья сторона, если её длина — целое число?
37. Найдите наибольшую возможную площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10см.
38. Найдите наибольшую возможную площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 12см.
39. Равнобедренный треугольник, углы которого относятся как $4:1$, достроили до параллелограмма, диагональю которого является боковая сторона. Найти углы параллелограмма.
40. Равнобедренный треугольник, углы которого относятся как $5:2$, достроили до параллелограмма, диагональю которого является боковая сторона. Найти углы параллелограмма.
41. В треугольник ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найти площадь треугольника ABC.
42. В треугольник ABC $BC = 26$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 19$ см и $NC = 5$ см. Найти площадь треугольника ABC.
43. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями 4 и 6.
44. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями 2 и 3.
45. Найдите длину медианы CM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(2;-5)$, $B(4;-3)$, $C(0;0)$.
46. Найдите длину медианы CM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(-2;5)$, $B(-4;3)$, $C(0;0)$.
47. Основания трапеции равны 12 см и 18 см. Найти длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.
48. Основания трапеции равны 10 см и 16 см. Найти длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.
49. Найти периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 кв. см., а точка пересечения диагоналей удалена от его сторон на 2 и 3 см.
50. Найти периметр параллелограмма, если его площадь равна 48 кв. см., а точка пересечения диагоналей удалена от его сторон на 3 и 4 см.
51. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $3:4$, гипотенуза равна 50. Найти отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.
52. Катет прямоугольного треугольника относится к гипотенузе, равной 25 см, как $3:5$. Найти отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.
53. Стороны треугольник 5 см, 12 см и 13 см. Найти длину медианы, проведённой к большей стороне.
54. Стороны треугольник 6 см, 8 см и 10 см. Найти длину медианы, проведённой к большей стороне.
55. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $tgA = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\cos A$.
56. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $tgA = \dfrac{2}{3}$. Найдите $\cos A$.
57. Периметр параллелограмма равен 18 см, а одна из его высот в два раза больше другой. Найти стороны параллелограмма.
58. Периметр прямоугольника равен 28 см, а диагональ 10 см. Найти стороны прямоугольника.
59. Сумма внутренних углов многоугольника в 2 раза больше суммы внутренних углов квадрата. Найти число сторон многоугольника.
60. Сумма внутренних углов многоугольника в 3 раза больше суммы внутренних углов квадрата. Найти число сторон многоугольника.
61. В треугольнике ABC на стороне AC взяли точку M и провели прямую, параллельную AB,

которая пересекла сторону BC в точке N. Найдите отношение площади треугольника MCN к площади трапеции $AMNB$, если $AM : MC = 2 : 3$.

62. В треугольнике ABC на стороне AC взяли точку M и провели прямую, параллельную AB, которая пересекла сторону BC в точке N. Найдите отношение площади треугольника MCN к площади трапеции $AMNB$, если $AM : MC = 3 : 2$.

63. Периметр прямоугольника 34 см, а диагональ 13 см. Найти стороны прямоугольника.

64. В прямоугольной трапеции основания равны 2 см и 6 см. Меньшая боковая сторона равна 3 см. Найти косинус острого угла.

65. В прямоугольной трапеции основания равны 5 см и 8 см. Меньшая боковая сторона равна 4 см. Найти косинус острого угла.

66. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно $48°$ и $76°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C.

67. В треугольнике ABC углы B и C равны соответственно $64°$ и $24°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины A.

68. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отметили точку M. Площадь треугольника MCD равна 38см^2. Найдите площадь параллелограмма.

69. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отметили точку M. Площадь треугольника MCB равна 42см^2. Найдите площадь параллелограмма.

70. Расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно 3 см. Найдите площадь квадрата.

71. Расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно 4 см. Найдите площадь квадрата.

72. В прямоугольный треугольник вписана окружность, которая точкой касания делит гипотенузу на 2 части — 2 см и 3 см. Найдите радиус окружности.

73. В прямоугольный треугольник вписана окружность, которая точкой касания делит гипотенузу на 2 части — 4 см и 6 см. Найдите радиус окружности.

74. Площадь прямоугольной трапеции 54см^2. Две меньшие стороны равны между собой, а острый угол равен $45°$. Найти меньшее основание.

75. Площадь прямоугольной трапеции 24см^2. Две меньшие стороны равны между собой, а острый угол равен $45°$. Найти меньшее основание.

76. Сторона ромба равна 10, а одна из диагоналей 12. Найти вторую диагональ.

77. Сторона ромба равна 10, а одна из диагоналей 16. Найти вторую диагональ.

78. В равнобедренном треугольнике с углом $70°$ при вершине найти угол между высотами, проведёнными к боковым сторонам.

79. В равнобедренном треугольнике с углом $50°$ при вершине найти угол между высотами, проведёнными к боковым сторонам.

80. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18. Середина M стороны AB соединена с точкой D. Найти отрезки, на которые диагональ AC делится отрезком DM.

81. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 15. Середина M стороны AB соединена с точкой D. Найти отрезки, на которые диагональ AC делится отрезком DM.

82. В прямоугольном треугольнике угол C прямой, катет AC равен m, $\angle CAB$ равен α. Найти катет BC.

83. В прямоугольном треугольнике угол C прямой, катет AC равен m, $\angle ABC$ равен α. Найти катет BC.

84. Диагонали ромба 14 см и 13 см. Найдите его площадь.

85. Диагонали ромба 16 см и 11 см. Найдите его площадь.

86. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AC = 18\text{см}$, $\angle B = 30°$.

87. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $BC = 12\text{см}$, $\angle A = 30°$.

88. В прямоугольном треугольнике угол C прямой, $\sin\angle A = \frac{2}{3}$. Найдите тангенс этого угла.
89. В прямоугольном треугольнике угол C прямой, $\cos\angle A = \frac{2}{3}$. Найдите тангенс этого угла.
90. В равнобедренном треугольнике угол между высотами, проведёнными к боковым сторонам, равен $40°$. Найдите угол при вершине треугольника.
91. В равнобедренном треугольнике угол между высотами, проведёнными к боковым сторонам, равен $80°$. Найдите угол при вершине треугольника.
92. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, P, Q — середины сторон. Найдите площадь четырёхугольника $MNPQ$, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.
93. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, P, Q — середины сторон. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если площадь четырёхугольника $MNPQ$ равна S.
94. В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите медиану CK.
95. Три окружности, радиусы которых 2, 4 и 6, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.
96. Сторона ромба равна 20, а тупой угол $120°$. Найдите длину меньшей диагонали.
97. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна c, а мера острого угла A равна α. Найти периметр треугольника.
98. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна c, а мера острого угла A равна α. Найти площадь треугольника.
99. В трапеции большее основание равно 18 см, углы при большем основании равны $53°$ и $37°$. Найти расстояние от точки пересечения боковых сторон до середины большего основания.
100. В трапеции большее основание равно 22 см, углы при большем основании равны $58°$ и $32°$. Найти расстояние от точки пересечения боковых сторон до середины большего основания.
101. Две окружности, радиусы которых отличаются в 4 раза, касаются внешним образом. AB — их общая касательная (A и B — точки касания) имеет длину 8 см. Найти радиусы окружностей.
102. Две окружности, радиусы которых отличаются в 4 раза, касаются внешним образом. AB — их общая касательная (A и B — точки касания) имеет длину 16 см. Найти радиусы окружностей.
103. В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 15 см. Найдите основание треугольника.
104. В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$. Найти высоту, проведённую к боковой стороне стороне, если основание треугольника равно 30 см.
105. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция $(AD \parallel BC)$. Известно, что $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = 16$. Найти $\frac{BC}{AD}$.
106. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция $(AD \parallel BC)$. Известно, что $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = 25$. Найти $\frac{BC}{AD}$.
107. Стороны треугольника равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, 3. Найдите площадь треугольника.
108. Стороны треугольника равны $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, 4. Найдите площадь треугольника.
109. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, угол $B = 120°$, $AB = BC = 4$. K — середина BC. Найти AK.
110. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, угол $B = 120°$, $AB = BC = 6$. K — середина BC. Найти AK.
111. В прямоугольном треугольнике с прямым углом B проведена высота BH. Найдите AH, если $\angle ABH = 60°$ и $CH = 8$.
112. В прямоугольном треугольнике с прямым углом B проведена высота BH. Найдите HC, если $\angle ACB = 60°$ и $AH = 12$.
113. В прямоугольном треугольнике с прямым углом B проведена высота BH. Найдите AH, если $\angle ABH = 60°$ и $CH = 4$.
114. В прямоугольном треугольнике с прямым углом B проведена высота BH. Найдите HC, если

$\angle ACB = 60^\circ$ и $AH = 18$.
115. Найдите площадь трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями длины 4 и 5.
116. Найдите площадь трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями длины 8 и 5.
117. Найдите площадь трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями длины 6 и 7.
118. Найдите площадь трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями длины 6 и 5.
119. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка L, а на стороне BC взята точка K так, что $KD = DL = KL = 6$, $\angle ABL = 60^\circ$. Найдите площадь прямоугольника.
120. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка L, а на стороне BC взята точка K так, что $KD = DL = KL = 8$, $\angle ABL = 45^\circ$. Найдите площадь прямоугольника.
121. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка L, а на стороне BC взята точка K так, что $KD = DL = KL = 8$, $\angle ABL = 60^\circ$. Найдите площадь прямоугольника.
122. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка L, а на стороне BC взята точка K так, что $KD = DL = KL = 6$, $\angle ABL = 45^\circ$. Найдите площадь прямоугольника.
123. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает биссектрису угла, смежного с углом C, в точке M. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если расстояние от точки M до прямой BC равно 4.
124. В четырёхугольнике $ABCD : AD = BC$, серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Найдите угол BCP, если $\angle ADP = 30^\circ$.
125. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис углов A и B проведена прямая, параллельная AB, пересекающая стороны треугольника в точках K и N. Найдите длину AB, если периметр треугольника ABC равен 12, а периметр треугольника KCN равен 8.
126. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис углов, смежных с углами A и B, проведена прямая, параллельная AB, пересекающая продолжения сторон треугольника в точках K и N. Найдите длину AB, если периметр треугольника CKN равен 22, периметр ABC равен 18, а длина KN равна 4.
127. В треугольнике ABC $AB : AC = 3 : 5$, AD — биссектриса. Найдите площадь треугольника ACD, если площадь треугольника ABD равна 9см^2.
128. В треугольнике ABC BM — биссектриса. Площадь треугольника ABM относится к площади треугольника BCM как $1 : 3$. Найдите AB, если BC — 12 см.
129. Точка K принадлежит стороне AB параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь $ABCD$, если площадь треугольника CDK равна 28.
130. Точка L принадлежит стороне BC параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь $ABCD$, если площадь треугольника ALD равна 23.
131. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1. Найдите $\angle CA_1B_1$, если $\angle BAC = 32^\circ$.
132. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1. Найдите $\angle CB_1A_1$, если $\angle CBA = 17^\circ$.
133. В трапеции $ABCD$ основание AD больше основания BC на 5 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если $\angle A = 12^\circ$, $\angle D = 78^\circ$.
134. В трапеции $ABCD$ основание AD больше основания BC на 3 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если $\angle A = 21^\circ$, $\angle D = 69^\circ$.
135. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза — 12, а высота, проведённая к ней, равна 3.
136. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза — 16, а высота, проведённая к ней, равна 4.
137. Разность углов, прилегающих к одной стороне параллелограмма, равна 48°. Найдите больший угол параллелограмма.
138. Разность углов, прилегающих к одной стороне параллелограмма, равна 54°. Найдите больший угол параллелограмма.
139. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность радиуса 10. Найдите радиус

вписанной окружности.
140. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность радиуса 8. Найдите радиус вписанной окружности.
141. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу на отрезки 3 и 2. Найти радиус окружности.
142. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу на отрезки 4 и 6. Найти радиус окружности.
143. Высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная из вершины B на основание AC равна a, угол $A=\alpha$. Найдите площадь треугольника.
144. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно a, угол $A=\alpha$. Найдите площадь треугольника.
145. Дан треугольник $OAB : O(0;0)$, $A(2;2)$, $B(x;2)$. Найдите координаты точки B, если площадь треугольника $OAB=4$.
146. Дан треугольник $OAB : O(0;0)$, $A(4;4)$, $B(x;4)$. Найдите координаты точки B, если площадь треугольника $OAB=4$.
147. Найдите большую высоту треугольника со сторонами $3\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, 4.
148. Найдите большую высоту треугольника со сторонами $4\sqrt{3}$, $\sqrt{23}$, 5.
149. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что угол ABD равен углу C. Найдите отрезки AD и DC, если $AB=2$, $AC=4$.
150. В трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции 24 см, меньшее основание 7 см. Найдите площадь трапеции.
151. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $tg\angle A=\frac{1}{2}$. Найдите $\cos\angle A$.
152. В квадрате $ABCD : AB=16$, K — середина BC, M лежит на стороне CD, причём $KM=AM$. Найдите MD.
153. В квадрате $KLMN : KL=8$, B — середина MN, A лежит на стороне KN, причём $LA=AB$. Найдите AN.
154. В трапеции $KLMN$ с основанием LM точка Q принадлежит отрезку KN, причём $(MQ)\parallel(LK)$. Найдите $S(KLMN)$, если $S(QMN)=21$, $LM:KN=4:7$.
155. В трапеции $ABCD$ с основанием AD точка K принадлежит отрезку AD, причём $(BK)\parallel(CD)$. Найдите $S(ABCD)$, если $S(BKC)=15$, $BC:AD=5:12$.
156. Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ с основанием AD пересекает CD в точке K, делящей отрезок CD пополам. Найдите AB, если $BC=4$, $AD=10$.
157. В трапеции $ABCD$ точка K — середина боковой стороны CD, $\angle BAK=\angle ABK$. Найдите $\angle BAD$.
158. В прямоугольном треугольнике ABC известны длины катетов $AC=3$, $BC=4$. O — центр вписанной окружности. Найти:
а) Радиус вписанной окружности;
б) $\angle AOB$;
в) Площадь треугольника BCK, где BK — биссектриса треугольника ABC.
159. Основания трапеции равны 10 см и 4 см, а углы при большем основании составляют $30°$ и $60°$.
а) Найдите боковые стороны трапеции;
б) Найдите площадь трапеции;
в) Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.
160. В треугольнике ABC $BC=1$, $\angle A=30°$. Найти наибольшую возможную длину стороны AB.
161. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, вписанный в окружность радиуса 1?
162. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A=60°$, $\angle D=30°$, $AB=BC=2$. Найти:
а) CD;

б) Площадь трапеции $ABCD$;
в) Площадь треугольника AOD, если диагонали трапеции пересекаются в точке O;
г) Расстояние между серединами сторон AD и BC.
163. Дан отрезок длины 1. Пользуясь циркулем и линейкой, построить отрезок длины $\sqrt{7}$.
164. Периметр прямоугольника равен 1 м, а площадь равна $616см^2$. Найдите площадь ромба, один из углов которого равен $60°$, а сторона равна меньшей из сторон прямоугольника.
165. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AB. Расстояния от этой прямой до точек A и B соответственно равны 1 и 7. Найдите стороны треугольника.
166. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Угол A равен $60°$, угол ABD равен $90°$, $CD = 4$ см. Найти:
а) Определить вид трапеции;
б) Радиус этой окружности;
в) Площадь треугольника ABD;
г) Площадь треугольника BCD.
167. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$, $AB = BC = 6$, $AD = 18$. Найдите:
а) Длину стороны CD;
б) Величину угла ACD;
в) Площадь треугольника AOB;
г) Длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, проходящего через точку O и параллельного основаниям.
168. Дан отрезок длины 1. Пользуясь циркулем и линейкой, построить отрезок длины $\sqrt{6}$.
169. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $OB = OD$, $AO < OC$. Докажите, что $\angle BAD > \angle BCD$.
170. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 4, а длина медианы, проведённой к боковой стороне, равна 5. Найдите площадь треугольника.
171. Отрезки, соединяющие середины противоположных стороны выпуклого четырёхугольника, равны, длины диагоналей этого четырёхугольника равны 6 и 8. Найдите площадь четырёхугольника.
172. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 60°$, $\angle D = 30°$, $AD = a$, $BC = b$. Найдите:
а) Площадь трапеции $ABCD$;
б) Длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.
173. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, которая удалена от прямой CD на 6 см. Найдите площадь треугольника AOB, если $CD = 8$ см.
174. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$ см, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.
175. Найти площадь треугольника с вершинами, расположенными в точках $(1;8)$, $(5;7)$, $(7;2)$ координатной плоскости.
176. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 24 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.
177. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC и BC угол A равен $60°$. Биссектриса угла A пересекает катет BC в точке P, длина отрезка PB равна 4. Найдите
а) площадь треугольника ABC;
б) площадь треугольника ABP;
в) радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABP.
178. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC и BC угол A равен $60°$. Биссектриса угла A пересекает катет BC в точке P, длина отрезка PC равна 1. Найдите
а) площадь треугольника ABC;
б) площадь треугольника ABP;

в) радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABP.

179. Найдите площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 12 см и 6 см, а один из углов равен 60 градусов.

180. В остроугольном треугольнике ABC его высоты BD и AE пересекаются в точке O. Докажите, что $BO \cdot OD = AO \cdot OE$.

181. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой, опущенной на AD, и равна половине стороны AB. Найдите расстояние между прямыми AB и CD, если $AD = 8$.

182. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой, опущенной на AD, и равна половине стороны AB. Найдите расстояние между прямыми AB и CD, если $BC = 4$.

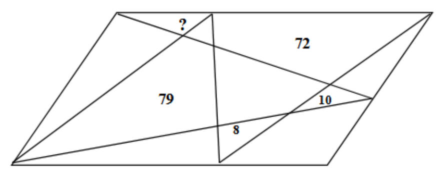
183. Известны длины сторон ΔABC : $AB = 5$, $CA = 8$, $BC = 9$. На луче AB, за точкой B, выбрана такая точка K, что $\angle KCA = \angle ABC$. Найдите стороны ΔKBC.

184. Известны длины сторон ΔABC : $AB = 4$, $AC = 8$, $BC = 6$. На отрезке BC выбрана такая точка D, что $\angle BAD = \angle ACB$. Найдите стороны ΔADC.

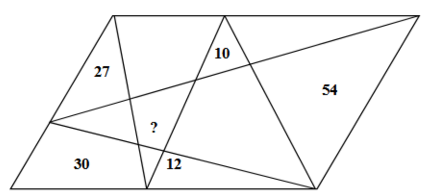
185. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются под прямым углом. Найдите $|BC|$, если длина медианы треугольника, проведённой из вершины A, равна 36.

186. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются под прямым углом. Найдите длину медианы треугольника, проведённой из вершины A, если $|BC| = 42$.

187. На чертеже — параллелограмм. Подписаны площади его отдельных частей. Определите площадь треугольника, отмеченного знаком вопроса.



188. На чертеже — параллелограмм. Подписаны площади его отдельных частей. Определите площадь четырёхугольника, отмеченного знаком вопроса.



189. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 64 см, а биссектриса острого угла A делит сторону BC в отношении 1:2, считая от вершины B.

190. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 100 см, а биссектриса острого угла A делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B.

191. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными 15см , 17см, 8см.

192. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными 24см, 25см, 7см.

193. Разность двух оснований равнобедренной трапеции равна 3. Синус угла при ее основании равен 0,8. Найдите длину боковой стороны трапеции.

194. Разность двух оснований равнобедренной трапеции равна 4. Синус угла при ее основании равен 0,6. Найдите длину боковой стороны трапеции.

4 9 класс

Вступительная работа в 9 класс также содержит порядка 20 заданий, но на неё уже даётся 240 минут. Большая часть заданий могла бы присутствовать и в работе для 8 класса, новых тем совсем немного. Поэтому надо внимательно изучить программу для 8 класса, все рекомендации остаются прежними.

4.1 Числовые выражения

Единственным новшеством, которое может встретиться в задания на эту тему являются дробные и отрицательные степени. Они являются естественным обобщением целых степеней и вычисляются так: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Любые степени подчиняются абсолютно тем же законам, что и целые.

Задачи. Во всех примерах задание упростить (избавиться от иррациональности в знаменателе) или вычислить.

1. $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$,
2. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$,
3. $1998\dfrac{19}{6891}\cdot 1997\dfrac{19}{6891}-1999\dfrac{19}{6891}\cdot 1996\dfrac{19}{6891}$,
4. $(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1)\cdot(\sqrt[3]{49}-1)\cdot(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1)$,
5. $0,815\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{6}\cdot(-4,385)+0,815\cdot\dfrac{1}{6}-(-4,385)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)$,
6. $(-14,09)\cdot 2\dfrac{1}{6}-6,31\cdot\left(-1\dfrac{1}{2}\right)-2\dfrac{1}{6}\cdot 6,31+\left(-1\dfrac{1}{2}\right)\cdot(-14,09)$,
7. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$,
8. $\sqrt{19-6\sqrt{10}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}$,
9. $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$,
10. $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$,
11. $(-1,5)^{-3}-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3}-\left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^{0,5}\right)^{0}+16^{\frac{3}{4}}\cdot 0,5$,
12. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4}-\left(\left(\dfrac{9}{25}\right)^{0}\right)^{0,5}-(-0,5)^{-3}-25^{1,5}\cdot 0,2$.
13. $(-1)^{21}-81^{\frac{3}{4}}+\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{6}-16^{\frac{5}{4}}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$,
14. $(-1)^{18}+32^{\frac{4}{5}}+8\cdot 27^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{27}\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{12}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-3}$,
15. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$,
16. $(\sqrt{5}-\sqrt{6})\sqrt{11+2\sqrt{30}}$,
17. $\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0,75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0,3:0,01}{70}+\dfrac{2}{7}$,
18. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0,05$,

19. $\dfrac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{80}}$,

20. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}$,

21. $\dfrac{7,46^3+6,26^3}{13,72}-7,46\cdot 6,26$,

22. $\dfrac{2,5^3-4,4^3}{1,9}+2,5^2+4,4^2$,

23. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0,16}:\dfrac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0,5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4,1\right)}$,

24. $2\sqrt{3}+0,25(\sqrt{21}-5)(\sqrt{7}+3\sqrt{3})+\dfrac{2\sqrt{7}-4}{1+\sqrt{7}}$,

25. $\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{7}{2\sqrt{2}+1}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$,

26. $(36,5^2-27,5^2):\left(\dfrac{57^3+33^3}{90}-57\cdot 33\right)$,

27. $\left(\dfrac{97^3-53^3}{44}+97\cdot 53\right):(152,5^2-27,5^2)$,

28. $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

29. $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

30. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

31. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{11}}{3}\right)$,

32. $\sqrt[6]{31+10\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{6}}$,

33. $\sqrt{175}-3\sqrt{3\frac{1}{9}}-6\sqrt{1,75}$,

34. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}\right)^3$

35. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}$,

36. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}$.

37. Сравните числа:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $2\sqrt{2}$.

б) $\sqrt{10}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{12}-\sqrt{13}$.

38. Сравните значения выражений $A=27894^2+1618^2$ и $B=27895^2+1617^2$.

39. Сравните значения выражений $A=191^6$ и $B=188\cdot 189\cdot 190\cdot 192\cdot 193\cdot 194$.

4.2 Преобразование буквенных выражений

Все советы насчёт преобразований: извлечение корня и замена переменных остаются в силе. Теперь заменять следует не только квадратный корень, но и корни других степеней.

Задачи. Во всех задачах необходимо упростить выражение, если не указано иное.

1. $\left(\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}-\dfrac{2\sqrt[4]{ab}}{b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}\right)^{-1}$,

2. $a^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\dfrac{3}{a+1}+\dfrac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[3]{a^2}-1}\right)^{-1}\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}+1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2$,

3. $\left(\dfrac{n-m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}\right)^2:\left(\dfrac{\sqrt{n^3}-\sqrt{m^3}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}-3\sqrt{mn}\right)$,

4. $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$,

5. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{a}{b}+2\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$,

6. $\left((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-1}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-1}\right)^{-2}:\dfrac{a-b}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$,

7. $\left(\sqrt{y}-\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$,

8. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right):\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$,

9. $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}{1-\sqrt{a-1}}$ $(a>2)$,

10. $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}{1-\sqrt{a-1}}$ $(1\leqslant a<2)$,

11. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}+\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}\right)^{-2}$,

12. $\left(\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right):\sqrt{ab}$,

13. $(1-a^2):\left(\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right)+1$,

14. $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$,

15. $\left(\dfrac{27^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+3^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\right):(3-a^{-1})-\dfrac{2a^{-\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$,

16. $\left(\dfrac{8^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}-2^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right):(2-y^{-1})+\dfrac{2y^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}$,

17. $\left(\dfrac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}\cdot\left(\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{-1}\right)^{0,5}+x^{0,5}$ $(0<x<9)$,

18. $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-8}{a^{\frac{1}{2}}+2}\cdot\left(\dfrac{a+2\sqrt{a}+4}{a-4}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}$ $(a>4)$,

19. $\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{a+2\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-2\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a+4}-\dfrac{8}{a-4}$,

20. $\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}-x+1}\right)(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$,

21. $\left(\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}-a+\sqrt{2}\right)^{-1}$,

22. $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+1}{a-1}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$,

23. $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+\sqrt{x}y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-\sqrt{x}y}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt{y}}{x+y}$, 24. $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})}-\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}$,

25. $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$, 26. $\left(\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right):\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)$,

27. $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x-\sqrt{x}\sqrt{y}+y}+2xy\dfrac{(\sqrt{x})^{-1}-(\sqrt{y})^{-1}}{x-y}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})$,

28. $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b}+2ab\dfrac{(\sqrt{a})^{-1}+(\sqrt{b})^{-1}}{a-b}\right)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$,

29. $\dfrac{3\cdot\sqrt{x^2y}-x\sqrt{25y}}{\sqrt{64x^4y^3}}$, $(x<0)$, 30. $\dfrac{4\cdot\sqrt{x^2y}+x\sqrt{9y}}{\sqrt{x^4y^3}}$, $(x<0)$,

31. $\dfrac{a^2+8a+15}{\sqrt{a^2+10a+25}}+\dfrac{a^2+3a+2}{\sqrt{a^2+2a+1}}$ $(-5<a<-1)$,

32. $\dfrac{a^2+9a+20}{\sqrt{a^2+8a+16}}+\dfrac{a^2+8a+12}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ $(-4<a<-2)$,

33. $\left(\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{27a^{-3}}{64b^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$, 34. $\left(\dfrac{d^3-8}{d^2-4}-\dfrac{6d}{d+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{d+2}\right)^2$,

35. $\dfrac{x+40}{x^3-16x}:\left(\dfrac{x-4}{3x^2+11x-4}-\dfrac{16}{16-x^2}\right)$,

36. $\left(\left(x^{\frac{5}{6}}-\sqrt[3]{x}\right):\left(\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1}-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}+1}-x^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right)^{-3}$,

37. $\dfrac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\dfrac{x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^4}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+\sqrt[3]{xy}}$,

38. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x-1}$, 39. $\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x+1}$,

40. $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{b^3}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$,

41. $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{b^3}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$,

42. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, 43. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}$.

4.3 Уравнения

Во вступительных работах в 10 класс встречается только два принципиально новых вида уравнения.

Первый из них — это уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Для таких уравнений справедлива следующая равносильность: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$. Обратите внимание, что проверять неотрицательность подкоренного выражения нет необходимости, так как оно приравнивается к квадрату. А вот неотрицательность правой части проверить надо, значение корня не может быть отрицательным.

Второй — уравнения, в которых присутствует сумма (или разность) двух корней. В таком случае можно решить уравнение при помощи домножения на сопряжённое. Рассмотрим пример: $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = 5$. После домножения на сопряжённое имеем $(x+6)-(x+1) = 5(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1})$, $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} = 1$. Сложив полученное уравнение с исходным, получим $2\sqrt{x+6} = 6$, $x+6 = 9$, $x = 3$.

Отдельно заметим, что необходимо не забывать проверять ОДЗ во всех уравнениях, содержащих корень или знаменатель.

Задачи. Рекомендации по решению уравнений можно прочитать в разделе для 8 класса. Задание во всех номерах — решить уравнение, если не указано иное.

1. $\dfrac{x+1}{2x-3} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2+6x-5}{2x^2-x-3}$,
2. $\dfrac{x+2}{2x-1} + \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x^2+8x+2}{2x^2+3x-2}$,
3. $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-8} = 4$,
4. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} = 2$,
5. $||3+x|+2| = 2x$,
6. $||2+x|+3| = 3x$,
7. $\dfrac{z^2-z}{z^2-z+1} - \dfrac{z^2-z+2}{z^2-z-2} = 1$,
8. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{7}{6}$,
9. $\sqrt{x^2+8x-4} = \sqrt{4x-4}$,
10. $\sqrt{x^2+9x-3} = \sqrt{3x-3}$,
11. $|x-5| + |x-2| - |x+1| = -3$,
12. $|x-7| - |x| = 2 - |x+1|$,
13. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$,
14. $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{2}{x-3}$,
15. $(x+2)\sqrt{x^2-x-20} = 6x+12$,
16. $(x-1)\sqrt{x^2-x-6} = 6x-6$,
17. $|7x-12| - |11-7x| = 1$,
18. $|16-9x| - |9x-5| = 11$,
19. $min(2x^2-x-4; x^2+3x+1) = 3x+12$,
20. $max(x^2+x-5; -2x^2+7x+4) = x-1$,
21. $\dfrac{2}{x^2-x+1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x^3+1}$,
22. $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{4}{x^2+2x}$,
23. $|2x^2-x+1| = x-1$,
24. $|2x^2-x+2| = x-2$,
25. $\sqrt{3x^2-6x+16} = 2x-1$,
26. $\sqrt{3x^2-11x+21} = 2x-3$,
27. $\dfrac{2x+1}{1+x} = \dfrac{2}{x^2-1}$,
28. $\dfrac{1-2x}{x-1} = -\dfrac{2}{x^2-1}$,
29. $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8} = 12$,
30. $x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+8} = 12$,
31. $||x-2|-1| = x$,
32. $||x+2|-1| = -x$,
33. $\begin{cases} x^2+3xy = 1, \\ y-x = 1. \end{cases}$,
34. $\begin{cases} x^2+3xy = 1, \\ x-y = 1. \end{cases}$,
35. $\dfrac{44}{4-x^2} + \dfrac{2x+7}{x-2} = \dfrac{3-x}{x+2}$,
36. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{9x+13}{x^2-2x-3} = \dfrac{5}{3-x}$,
37. $(x+1)\sqrt{1+4x-x^2} = x^2-1$,
38. $(x^2-8x)\sqrt{7-x} = x(x^2-9x+8)$,
39. $\dfrac{1}{x^2+2x+4} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x^2-2x+4}{x^3-8}$,
40. $\dfrac{x^2+3x+9}{x^3+27} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x^2-3x+9}$,
41. $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1 = 0$,
42. $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1) = 28$,
43. $x-3+4\sqrt{x-3} = 12$,
44. $x+2-13\sqrt{x+2} = -42$,
45. $\dfrac{11x-x^2-8}{2x^2-x-3} = \dfrac{x+1}{2x-3} + \dfrac{x}{x+1}$,
46. $\dfrac{9x-x^2+2}{2x^2+3x-2} = \dfrac{x+2}{2x-1} + \dfrac{x+1}{x+2}$,

47. $(x-1)^2+3|x-1|-4=0$,

48. $(x-2)^2+|x-2|-6=0$,

49. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-2\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-1$,

50. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-2\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}=1$,

51. $\sqrt{7-x}=x-1$,

52. $x-\sqrt{x+1}=5$,

53. $|x+3|-|x-5|+|2x-5|=6$,

54. $|x-2|-|x+4|+|2x-3|=1$,

55. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$,

56. $\dfrac{16}{(x+6)(x-1)}-\dfrac{20}{(x+2)(x+3)}=1.$

57. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-4}=\dfrac{8}{3}$,

58. $\sqrt{12-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4x+1}{x+4}}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4x+1}{4+x}$,

59. $2x^2+3x-17=2(2-\sqrt{7})^2+3(2-\sqrt{7})-17$,

60. $\sqrt{2x-1}=x-2.$

61. $4x^2-9x-11=4(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-9(\sqrt{2}+\sqrt{3})-11$,

62. $\sqrt{1+4x}=x+1$,

63. $\begin{cases} x^2-y=\dfrac{3}{4}, \\ y^2+x=0,75. \end{cases}$,

64. $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7, \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1. \end{cases}$.

65. $\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x}\right)^2-x=\dfrac{2-x}{x}$,

66. $\left(\dfrac{x^2-4x+7}{x}\right)^2-x=\dfrac{7+2x}{x}$,

67. $\sqrt{x-1}=x-3$,

68. $\sqrt{x+2}=x$,

69. $|3-x|+|2x-5|=6$,

70. $|2-x|+|2x-3|=1$,

71. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}=6$,

72. $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{3x}{x-2}=-1$,

73. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}=1$,

74. $2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}=2$,

75. $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{x}{x^2+3x+4}+\dfrac{11}{2}=0$,

76. $\dfrac{4(x^2+1)}{x^2-10x+1}-\dfrac{5x}{x^2+1}+\dfrac{7}{2}=0$,

77. $(x+1)(x^2+5x+6)=x+2$,

78. $(x+3)(x^2+3x+2)=x+1$,

79. $(x^2-x-6)\sqrt{3x-2}=0$,

80. $(x^2-x-2)\sqrt{2x+1}=0$,

81. $\sqrt{12-x}=-x$,

82. $\sqrt{x+2}=-x$,

83. $(3x-2)(x-1)=4(x-1)^2$,

84. $(3x+2)(x+1)=2(x+1)^2$,

85. $\dfrac{5}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4x+4}{x^3-8}$,

86. $\dfrac{4}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6x+9}{x^3-27}$,

87. $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$,

88. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$,

89. $\dfrac{1}{|x^2-5x+6|}=\dfrac{|x-1,5|}{x^2-5x+6}$,

90. $\dfrac{|2x-1|}{8-x-x^2}-\dfrac{4}{|x^2+x-8|}=0$,

91. $\sqrt{5x+1}=x-1$,

92. $|3x+2|=|7x-4|$,

93. $|4x-7|=|2x+3|$,

94. $x^2-x=14-\dfrac{24}{x^2-x}$,

95. $x^2-5x=30-\dfrac{144}{x^2-5x}$,

96. $\dfrac{4}{|x^2+10x|}=\dfrac{1}{25}+\dfrac{2}{5x}$,

97. $\dfrac{25}{|x^2+5x|}=1+\dfrac{5}{x}$,

98. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2$,

99. $4-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{2k-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}$,

100. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^2=\dfrac{2(x^2-x)}{x^2+4x+3}$,

101. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^2=\dfrac{2x^2+2x}{x^2+4x-5}$,

102. $\sqrt{x+1}+3\sqrt{3x+7}=17-x$,

103. $x^2+2x+2|x+1|=7$,

104. $(345x^2+137x-208)\sqrt{3x-2}=0$,

105. $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$,

106. $(x-4)\sqrt{x^2-x-6}=6x-24$,

107. $(x+6)\sqrt{x^2-x-20}=6x+36$,

108. $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)=8$,

109. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)=15$,

110. $4x^2-9x-11=4(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-9(\sqrt{5}+\sqrt{3})-11$,

111. $2x^2+3x-17=2(2-\sqrt{5})^2+3(2-\sqrt{5})-17$,

112. $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-9}=5$,

113. $\sqrt{x^2+3x+6}-\sqrt{x^2+3x-1}=1$.

4.4 Неравенства

В решении неравенств никаких новшеств нет: используются метод интервалов, равносильные переходы с модулями и замена переменной.

Задачи. Все необходимые указания можно найти в разделе для 8 класса.

1. $\dfrac{(x^2-4x+3)(x-3)(x^2+2x+3)}{(x^2+x-20)(x+2)^2} \geqslant 0$,
2. $\dfrac{(x^2-8x+15)(x-5)(x^2-2x+3)}{(x^2-3x-18)(x+1)^2} \geqslant 0$,
3. $\dfrac{x(x^2+2)(2-x)(x^3-64)}{(x^2-16)(x+2)^2} \leqslant 0$,
4. $\dfrac{x(x^2+3)(3-x)(x^3-8)}{(x^2-4)(x+3)^2} \leqslant 0$,
5. $\dfrac{x^2+3}{x+1} \leqslant 2$,
6. $\dfrac{x^2}{x-1} \leqslant 4$,
7. $|2x+4| < 2|x|+x$,
8. $|3x+6| < 3|x|+x$,
9. $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2} \geqslant 0$,
10. $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+1)^2} \geqslant 0$,
11. $|x^2-16| \leqslant 8-2x$,
12. $|x^2-16| \leqslant 8+2x$,
13. $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+7x+12} \leqslant 1$,
14. $\dfrac{x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)} > 2$,
15. $1,5x-|x|+|2x-4| \geqslant 4$,
16. $2x-5+2|x-3| < |x+1|$,
17. $\dfrac{2x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)} > 2$,
18. $|x^2-7x+7| > x-5$,
19. $|x^2-4x-14| < x+10$,
20. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+7x+12} \leqslant 1$,
21. $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2+7x+12} \leqslant 1$,
22. $\dfrac{x^2-2x-8}{|x-4|} < 7$,
23. $\dfrac{x^2-4x-5}{|x-5|} < 7$,
24. $\dfrac{x^2+9x+20}{(2x-x^2-1)(3x^2+x+2)} \leqslant 0$,
25. $\dfrac{(2x^2+x+1)(6x-x^2-9)}{x^2+8x+15} \geqslant 0$,
26. $\dfrac{(x^2-2x-8)(x^2-4x)}{x^2+7x+10} > 0$,
27. $\dfrac{(x^2-6x+8)(x^2-4)}{x^3+8} \geqslant 0$,
28. $x^2-2x-8 < 7|x-4|$,
29. $|x^2-3x|+2x-6 \leqslant 0$,
30. $\dfrac{(x^2-4x+4)(9-x^2)}{x^2+8x+16} \leqslant 0$,
31. $\dfrac{(x^2+14x+49)(16-x^2)}{x^2-6x+9} \geqslant 0$,
32. $\dfrac{(1-x^2)(x-1)^2(x+1)^3}{x^6+x^4+x^2} \leqslant 0$,
33. $\dfrac{(-1+x^2)(1-x)^2(x+1)^3}{x^8-x^6+x^4} \leqslant 0$,
34. $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| > 1$,
35. $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| < 1$,
36. $\dfrac{(x+1)\sqrt{-x^2-10x+11}}{x^2+x-12} \geqslant 0$,
37. $\dfrac{(x+2)\sqrt{-x^2-10x+11}}{x^2+x-12} \geqslant 0$,
38. $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}+3} > \dfrac{3}{\sqrt{x-5}+4}$,
39. $\dfrac{3}{\sqrt{x-4}+2} > \dfrac{2}{\sqrt{x-4}+3}$,
40. $\dfrac{x^2-4x+3}{2x-3} \leqslant \dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$,
41. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x+3} \leqslant \dfrac{x^2-3x+2}{x+5}$,
42. $\dfrac{(x+3)^2(x^2+4x-5)}{x^2-8x+16} \geqslant 0$,
43. $\dfrac{(x-3)^2(x^2-3x-10)}{x^2+8x+16} \leqslant 0$,
44. $\dfrac{(2x^2-7x+6)(x^2+3x-10)}{(x+1)(5+4x-x^2)} \leqslant 0$,
45. $\dfrac{(3x^2-5x+2)(x^2+3x-4)}{(x+2)(8+2x-x^2)} \leqslant 0$,
46. $|x-2| > 2+x-|3-x|$,

47. $|2x+3| > |x| - 4x - 1$,

48. $\dfrac{\sqrt{(2-x)^2}}{x-3} > 2$,

49. $\dfrac{\sqrt{(1-x)^2}}{x-2} > 3$,

50. $\dfrac{2x^2-15x+7}{\sqrt{14+5x-x^2}} \geqslant 0$,

51. $\dfrac{3x^2-19x+6}{\sqrt{18+3x-x^2}} \geqslant 0$,

52. $\dfrac{|x-2|(3x^2+2x-1)}{4+3x-x^2} \leqslant 0$,

53. $\dfrac{|x-3|(4x^2+7x-2)}{10+3x-x^2} \leqslant 0$,

54. $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2,5x - 3 \geqslant 0$,

55. $\dfrac{4}{x^2-x-6} \geqslant (2+x)^{-1}$,

56. $(\sqrt{5}-3)(x^{0,5} - 2x^{0,25} + 1) > 14 - 6\sqrt{5}$,

57. $\dfrac{x^2-2x-8}{|x-4|} \leqslant 7$,

58. $|x^2-4| \leqslant 3x$,

59. $|x^2-9| \leqslant 8x$,

60. $\dfrac{x^3}{2x-1} \leqslant x$,

61. $\dfrac{(x-1)^3}{2x-3} \leqslant x-1$,

62. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-x+1} \geqslant \dfrac{x-2x^2}{x^3+1}$,

63. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} \geqslant \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$,

64. $|3x^2+12x-15| \leqslant 15 - 12x - 3x^2$,

65. $|2x^2+15x-17| \leqslant 17 - 15x - 2x^2$.

4.5 Исследование функций и уравнений

Функциональные уравнения. Принципиально новыми задачами, появляющимися в работах для 9 класса, являются функциональные уравнения. Есть два разных вида уравнений и, соответственно, два способа решения соответствующих задач.
Замена переменной. Дано, что $f(5x-1)=25x^2-1$. Найти $f(x)$.

Сделаем замену переменной: $y=5x-1$. Тогда $x=\dfrac{y+1}{5}$ и $f(y)=25\left(\dfrac{y+1}{5}\right)^2-1=y^2+2y+1-1=y^2+2y$. Значит, $f(x)=x^2+2x$.
Подстановка чисел. Дано, что $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(4)=10$. Найти $f(1)$.
Подставим вместо x и y две двойки: $f(2+2)=f(2)+f(2)$, откуда $f(2)=5$. Аналогично возьмём две единицы и получим $f(1)=2,5$.

Задачи. Все указания можно найти в соответствующем разделе 8 класса.
1. Пусть $x^2-10x+q=0$. При каких q сумма квадратов корней данного уравнения равна 2?
2. Пусть $x^2-6x+q=0$. При каких q сумма квадратов корней данного уравнения равна 4?
3. Сколько решений может иметь система $\begin{cases} ax+y+b=0, \\ (x-c)^2+y^2=4. \end{cases}$?
4. Сколько решений может иметь система $\begin{cases} kx+y+l=0, \\ (x+c)^2+y^2=4. \end{cases}$?
5. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x(x^2+x-12)(x^2-3x+2)}{(x^2-x-6)(-x+5)}}$.
6. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x(x^2-2x-15)(x^2-6x+8)}{(x^2-11x+30)(x+1)}}$.
7. При каком a один из корней уравнения $x^2-\dfrac{15}{4}x+a^3=0$ будет квадратом другого?
8. При каком a один из корней уравнения $x^2-\dfrac{63}{4}x+a^3=0$ будет квадратом другого?
9. Найти область определения функции $y(x)=\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{4+3x-x^2}}$.
10. Найти область определения функции $y(x)=\dfrac{3}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.
11. При каких k модуль разности корней уравнения $x^2-kx+15=0$ равен 2?
12. При каких k модуль разности корней уравнения $x^2-kx+3=0$ равен 2?
13. При каких k уравнение $kx^2-(k+1)x+2k-1=0$ имеет два различных корня?
14. При каких k уравнение $kx^2-(k-1)x+2k+1=0$ имеет два различных корня?
15. Найдите наибольшее значение функции $y=-x+2\sqrt{x}-2$.
16. Найдите наибольшее значение функции $y=-x+4\sqrt{x}-5$.
17. Найдите функцию $f(x)$, если $f(2x-3)=4x-5$.
18. Найдите функцию $f(x)$, если $f(2x+3)=4x+5$.
19. При каких значениях a уравнение $2ax^2+(10-a)x-a+5=0$ имеет ровно один корень?
20. При каких значениях a уравнение $2ax^2+(10+a)x-a-5=0$ имеет ровно один корень?
21. Не решая уравнения $2x^2-3x-11=0$, найдите $\dfrac{x_2}{1+x_1}+\dfrac{x_1}{1+x_2}$, где x_1 и x_2 его корни.
22. Не решая уравнения $9x^2+18x-8=0$, найдите $x_1^3+x_2^3$, где x_1 и x_2 его корни.
23. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a^2-1)x^2+(2a+1)x-3=0$ лежат по разные стороны от точки $x_0=1$.

24. Найдите все значения параметра b, при которых число (-1) заключено между корнями уравнения $(4-b^2)x^2-(3b-1)x+7=0$.
25. Найти a, если $f(x)=x^2-6x+a$ и её наименьшее значение равно 1.
26. Найти a, если $f(x)=-x^2+4x+a$ и её наибольшее значение равно 2.
27. При каких a множество решений неравенства $(a-3)x^2-(a+1)x+a+1\geqslant 0$ является отрезком?
28. При каких a множество решений неравенства $(a+2)x^2-(a-1)x+a-1\geqslant 0$ является отрезком?
29. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $m^2-\dfrac{4}{n}$, если $-3\leqslant m\leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $1,6\leqslant n\leqslant 2$.
30. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $b-0,4a^2$, если $-5\leqslant a\leqslant -1,5$, $-0,5\leqslant b\leqslant 2,4$.
31. Найдите все значения параметра a, при которых число 2 заключено между корнями уравнения $x^2+(a-5)x+a^2-a=0$.
32. Найдите все значения параметра a, при которых число (-1) заключено между корнями уравнения $x^2-(a-7)x+a^2-6a=0$.
33. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,6+13t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?
34. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,4+9t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?
35. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2+(a^2+5a-2)x+a+4=0$ расположены симметрично относительно точки $x_0=-2$?
36. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2+(a^2+a-2)x+a+4=0$ расположены симметрично относительно точки $x_0=-1$?
37. Найдите наименьшее значение функции $y=7+\sqrt{x^2-2x+5}$.
38. Найдите наименьшее значение функции $y=6+\sqrt{3-x^2-2x}$.
39. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+(4a+2)x+3a+1,5=0$ имеет единственный корень.
40. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2-(2a+6)x+3a+3=0$ имеет единственный корень.
41. Найдите наименьшее значение выражения $23-\dfrac{16}{x^2-2x+5}$.
42. Найдите наибольшее значение выражения $5+\dfrac{16}{x^2+2x+5}$.
43. Найдите наибольшее значение выражения $x^2-4xy+y^2$, если $x-y=3$.
44. Найдите наибольшее значение выражения $5x^2+4xy-5y^2$, если $2x-y=1$.
45. При каких значениях a уравнение $x^3+6x^2+ax=0$ имеет два различных корня?
46. При каких значениях a уравнение $4x^3+4x^2+ax=0$ имеет два различных корня?
47. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a}+\sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a}-\sqrt{10-a}=1$.
48. Найдите значение выражения $\sqrt{13-a}+\sqrt{6-a}$, если $\sqrt{13-a}-\sqrt{6-a}=1$.
49. Функция f — нечётная и для любого x выполнено равенство $3f(x-1)+2f(x-5)=2x+1$. Найдите $f(2)$.
50. Функция f — нечётная и для любого x выполнено равенство $2f(x-2)+5f(x-8)=2x-1$. Найдите $f(3)$.
51. Придумайте многочлен второй степени $f(x)$ такой, что $f(1)=1$, $f(3)=27$, $f(4)=64$.
52. Придумайте многочлен второй степени $f(x)$ такой, что $f(1)=1$, $f(2)=8$, $f(4)=64$.
53. Найдите область определения функции $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\dfrac{3}{x^2+4x-21}$.
54. Найдите область значений функции $y=\dfrac{(x+6)(x^3-27)}{x^2+3x-18}$.

55. При каких значениях параметра b нули функции $f(x) = x^2 - (2b+3)x - b - 6$ находятся по разные стороны от 1?

56. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x-5| = \dfrac{3}{x+1}$ имеет два решения $x \geqslant 0$.

57. Вычислите $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$, если $a + \dfrac{1}{a} = -4$.

58. Найдите все значения параметра k, при которых следующая система имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} (k+2)x + 3y = 9 + kx, \\ x + (k+4)y = 2. \end{cases}$$

59. Дано уравнение $(a-1)x^2 + 4(a+1)x + a - 4 = 0$.

а) При каких значениях a уравнение имеет единственное решение?

б) При $a = 2$ найдите $x_1^3 + x_2^3$, где x_1, x_2 — корни данного уравнения.

в) При $a = -2$ найдите все значения параметра b, для которых решение неравенства $(a-1)x^2 + 4(a+1)x + a - 4 \geqslant b$ — отрезок.

60. Какие значения принимает выражение $a^2 - 6a + 1$ при a, принадлежащих отрезку $[1; 10]$?

61. Найдите наибольшее значения выражения $-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$.

62. При каком q квадрат разности корней уравнения $2x^2 - 2x + q = 0$ равен 9?

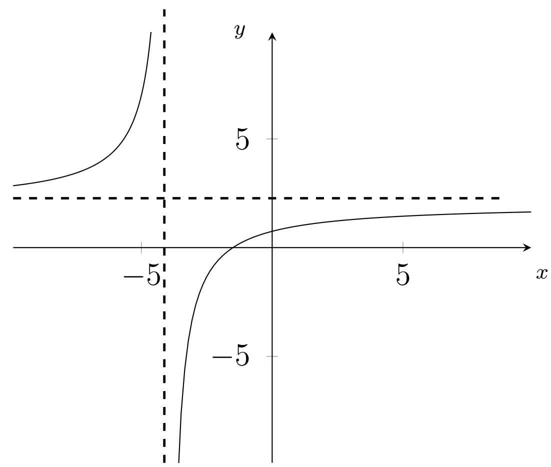
63. При каком q сумма квадратов корней уравнения $2x^2 - 8x + q = 0$ равна 16?

4.6 Графики

В 9 классе изучаются несколько новых вещей: график дробно-линейной функции, уравнение окружности и симметрия графиков (в том числе чётные и нечётные функции).

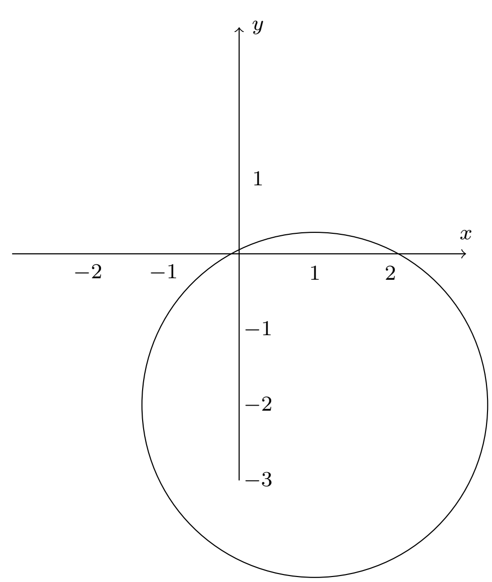
Дробно-линейная функция. Мы будем рассматривать функции вида $y = a + \dfrac{b}{cx+d}$. Их график представляет из себя гиперболу с горизонтальной асимптотой $y = a$ и вертикальной асимптотой $x = -\dfrac{d}{c}$.

Пример. Пусть дана функция $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Выделим целую часть: $\dfrac{2x+3}{x+4} = \dfrac{2x+8-5}{x+4} = 2 - \dfrac{5}{x+4}$. Теперь можно построить график, его асимптотами будут прямые $x = -4$ и $y = 2$.



Уравнение окружности. Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Здесь $(a;b)$ — это координаты центра окружности, а r её радиус. Сведение к уравнению окружности происходит при помощи выделения полных квадратов.

Пример. Постройте множество точек на плоскости, заданное уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Выделим полные квадраты: $x^2+y^2-2x+4y = 0$, $x^2-2x+1+y^2+4y+4 = 1+4$, $(x-1)^2+(y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$. Теперь видно, что это уравнение окружности с центром в точке $(1;-2)$ и радиусом $r = \sqrt{5}$.



Симметрия графиков. Во всех приведённых ниже утверждениях предполагается, что x принадлежит области определения функции f.

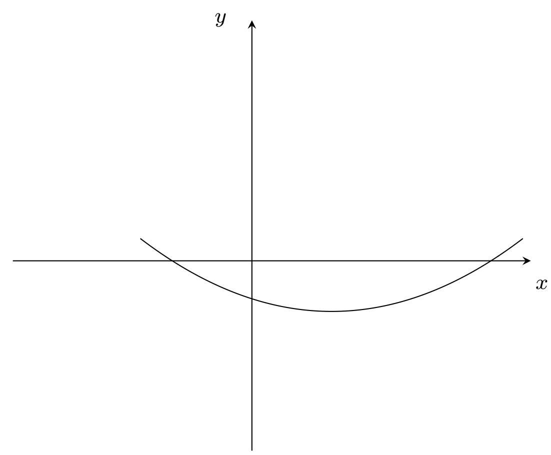
Если для любого x верно равенство $f(x) = f(-x)$, то такая функция f называется чётной, а если $f(x) = -f(-x)$, то нечётной. Все остальные функции называются функциями общего вида. Все нечётные функции центрально симметричны относительно центра координат, а все чётные функции симметричны относительно оси ординат.

Утверждения о симметрии графиков можно обобщить.
Прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого x выполняется равенство $f(a + x) = f(a - x)$.
Точка $(a; b)$ является центром симметрии графика функции $y = f(x)$ в том и только в том случае, когда для любого x выполняется равенство $f(a+x)+f(a-x) = 2b$. Центром симметрии гиперболы является точка пересечения её асимптот.

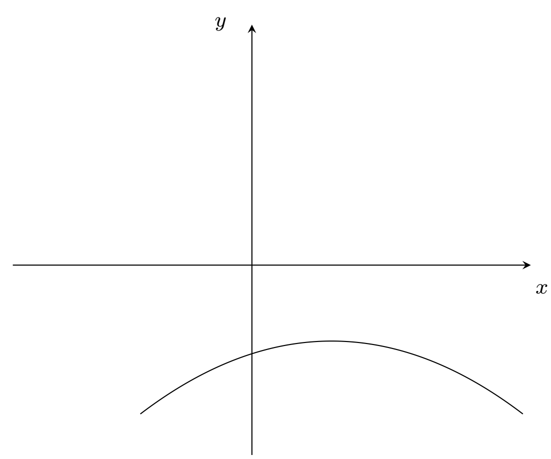
Задачи. О способах построения графиков с модулем можно прочитать в соответствующих разделах для 7 и 8 класса.

1. Построить график функции $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}(x-1)$.
2. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}(x+1)$.
3. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2-4x+3|}{|x-1|}$.
4. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2-x-2|}{|x+1|}$.
5. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2-4x|}{x} + |-x|$.
6. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2-2x|}{x-2} + |x|$.
7. Построить график функции $f(x) = 2x^2 - 8x + q$, если сумма квадратов корней этой функции равна 10.
8. Построить график функции $f(x) = -2x^2 + 2x + q$, если квадрат разности корней этой функции равен 9.
9. Найти центр симметрии графика функции $y = \dfrac{x+1}{x}$.
10. Найти центр симметрии графика функции $y = \dfrac{1-x}{x}$.
11. Найти расстояние от начала координат до прямой $3y + 4x = 12$.
12. Найти расстояние от начала координат до прямой $3y - 4x = 12$.
13. Найдите оси симметрии графика функции $y = |x+1| + |x+3|$.
14. Найдите оси симметрии графика функции $y = |x-1| + |x-3|$.
15. Для окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ найдите центр и радиус.
16. Для окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 2 = 0$ найдите центр и радиус.
17. Постройте график функции $y = \dfrac{|x-2|}{2-x}(x^2-2x)$.
18. Постройте график функции $y = \dfrac{|x+2|}{2+x}(x^2+4x+3)$.
19. Построить график $y = \dfrac{x^2+7x+6}{x+|x+2|}$.
20. Построить график $y = \dfrac{x^2-6x+5}{x-|x-2|}$.
21. Дано изображение графика функции $y = ax^2+bx+c$ (см. рис.). Определить знаки коэффициентов

$a,\ b,\ c$. Не забудьте обосновать ответ.



22. Дано изображение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис.). Определить знаки коэффициентов $a,\ b,\ c$. Не забудьте обосновать ответ.



23. Построить график функции $y = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2 - 4x}}{x^2 - x}$.

24. Построить график функции $y = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2 + 4x}}{x^2 + x}$.

25. Изобразить множество точек на плоскости: $(|y| - 3)(y + |x| - 1) = 0$.

26. Изобразить множество точек на плоскости: $(|x| - 3)(x + |y| - 1) = 0$.

27. Пусть $f(x) = \dfrac{x - 2 + |2x - 1|}{x^2 - 1}$.

а) постройте график функции $y = f(x)$;

б) найдите область определения и множество значений функции;

в) сколько решений имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a?

28. Пусть $f(x) = \dfrac{x + 2 - |2x + 1|}{x^2 - 1}$.

а) постройте график функции $y = f(x)$;

б) найдите область определения и множество значений функции;

в) сколько решений имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a?

29. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2 + y^2 - 9}{x^2 - y^2} = 0$.

30. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

31. Построить график $y=\dfrac{x-2}{|x^2-2x|}$.

32. Построить график $y=\dfrac{3-x}{|x^2-3x|}$.

33. Найти расстояние от начала координат до прямой $y=1-\dfrac{x}{2}$.

34. Найти расстояние от начала координат до прямой $y=2-2x$.

35. Задайте формулой квадратичную функцию, если её график проходит через точки $A(0;-2)$ и $B(-2;4)$ и функция принимает значение -4 в единственной точке.

36. Задайте формулой квадратичную функцию, если её значения при $x=-1$ и при $x=2$ совпадают, её наибольшее значение равно 3, а график содержит точку $P(1;1)$.

37. Пусть $f(x)=\dfrac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$.

а) постройте график функции $y=f(x)$;

б) найдите область определения и множество значений функции;

в) сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

38. Пусть $f(x)=\dfrac{x+1-|x+1|}{x^2-1}$.

а) постройте график функции $y=f(x)$;

б) найдите область определения и множество значений функции;

в) сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

39. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-9}=0$.

40. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}=0$.

41. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-4}=0$.

42. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-16}=0$.

43. Дана функция $f(x)=|x^2-2x|$.

а) постройте график функции $y=f(x)$;

б) сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

44. Дана функция $f(x)=|x^2+2x|$.

а) постройте график функции $y=f(x)$;

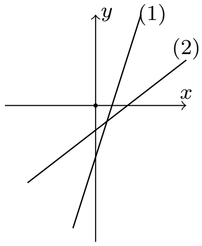
б) сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

45. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{yx-x^2-y+1}{x-1}=0$.

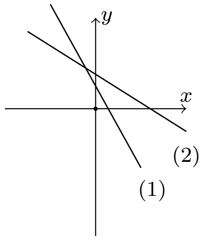
46. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{(y-2x+1)(y+2x-1)}{y^2-x^2}=0$.

47. Прямая a проходит через точки с координатами $(0;4)$ и $(6;0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0;8)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

48. Прямая a проходит через точки с координатами $(-6;0)$ и $(0;4)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0;-6)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

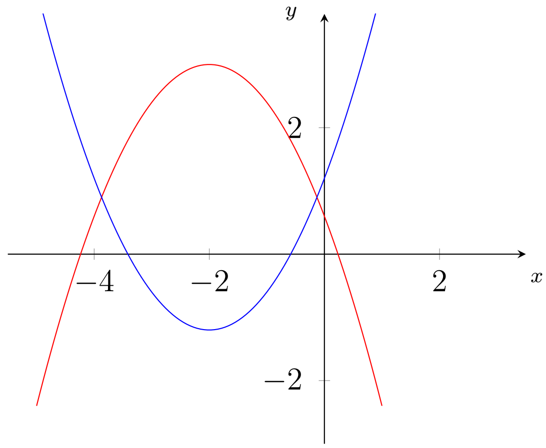


49. На рисунке изображены две прямые с уравнениями (1) $y_1 = k_1x + b_1$ и (2) $y_1 = k_2x + b_2$. Расставьте в порядке возрастания числа $k_1,\ k_2,\ b_1,\ b_2$.

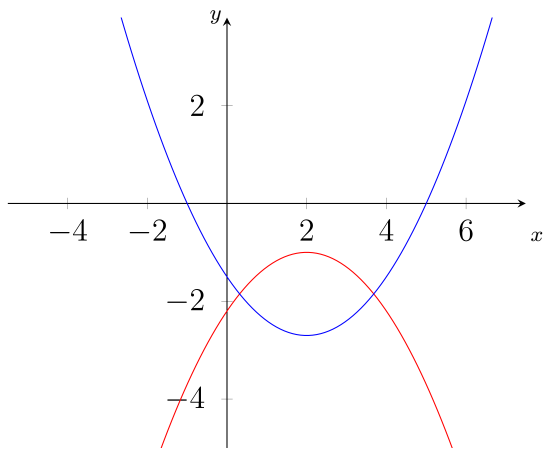


50. На рисунке изображены две прямые с уравнениями (1) $y_1 = k_1x + b_1$ и (2) $y_1 = k_2x + b_2$. Расставьте в порядке возрастания числа $k_1,\ k_2,\ b_1,\ b_2$.
51. а) Постройте график функции $y = -|x^2 - 2x|$.
б) При каких a прямая $y = a$ пересекает график функции в двух точках?
52. а) Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$.
б) При каких a прямая $y = a$ пересекает график функции в двух точках?
53. Парабола задана уравнением $y = (x+a)^2 + 1$. Прямая, задаваемая уравнением $y = 4 + 2x$ имеет с параболой единственную общую точку. Найти a.
54. Парабола задана уравнением $y = -(x-a)^2 + 4$. Прямая, задаваемая уравнением $y = 2x - 5$ имеет с параболой единственную общую точку. Найти a.
55. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|xy| > 1$.
56. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|xy| < 1$.
57. а) Постройте график функции $y = -\dfrac{4(x+2)}{x^2 + x - 2}$.
б) Найдите число решений уравнения $y = a$ в зависимости от a.
58. а) Постройте график функции $y = \dfrac{2(x-1)}{3x - 2 - x^2}$.
б) Найдите число решений уравнения $y = a$ в зависимости от a.
59. Докажите, что прямая $2x + 6y - 9 = 0$ не проходит через точки, обе координаты которых — целые числа.
60. Докажите, что прямая $4x + 6y - 7 = 0$ не проходит через точки, обе координаты которых — целые числа.
61. Постройте график функции $f(x) = x^2 - |2x - 2| - 1$ и укажите её множество значений.
62. Постройте график функции $f(x) = (x+1)|x-1|$ и укажите промежутки её возрастания.
63. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 2x - 8)(x+2)}{|x+2|}$. При каких m прямая $y = m$ пересекает график функции в трёх точках?
64. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x-1)}{|x-1|}$. При каких m прямая $y = m$ пересекает график функции в трёх точках?

65. Могут ли параболы на рисунке быть графиками функций $f(x) = ax^2 + b_1x + c$ и $g(x) = cx^2 + b_2x + a$?



66. Могут ли параболы на рисунке быть графиками функций $f(x) = ax^2 + b_1x + c$ и $g(x) = cx^2 + b_2x + a$?



67. Постройте график функции $y = -\dfrac{4|x+2|}{x^2+2x}$. При каком значении m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку?

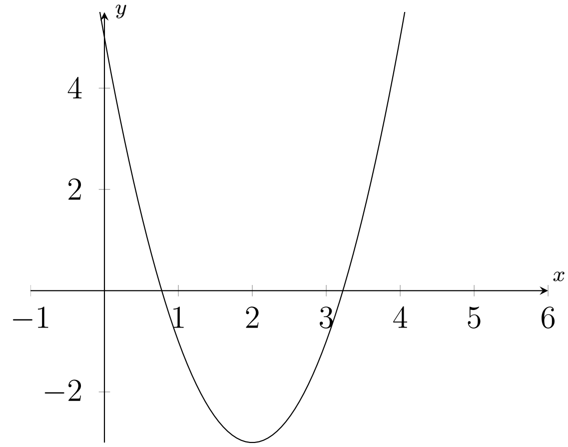
68. Постройте график функции $y = -\dfrac{6|x-3|}{x^2-3x}$. При каком значении m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку?

69. Постройте график функции $y = \dfrac{2x^2-8x}{|x-2|-2}$ и укажите те значения функции, которые она принимает ровно один раз.

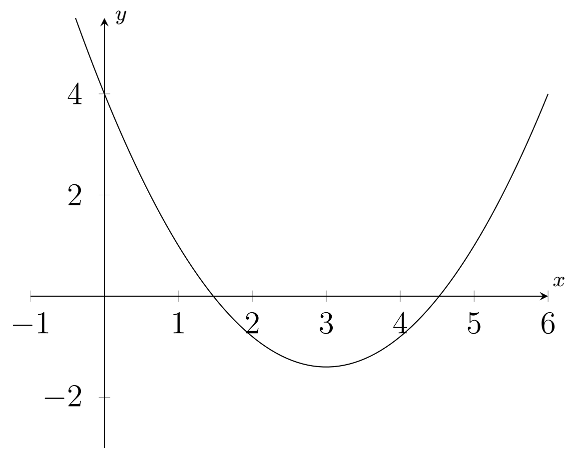
70. Постройте график функции $y = \dfrac{3x^2-6x}{|x-1|-1}$ и укажите те значения функции, которые она принимает ровно один раз.

71. Может ли парабола, приведённая на рисунке (абсцисса её вершины равна 2), быть графиком

функции $y = a(x-1)(x-4)$, где $a \neq 0$?



72. Может ли парабола, приведённая на рисунке (абсцисса её вершины равна 3), быть графиком функции $y = a(x-2)(x-5)$, где $a \neq 0$?



73. Постройте график функции $f(x) = -2x^{-2}$ при $x < 0$ и $f(x)$ — нечётная функция.

74. Постройте график функции $y = \dfrac{2x-3}{|x+2|}$.

75. Найдите все значения параметра k, при которых гипербола $y = \dfrac{k}{x-2}$ пересекает прямую, задаваемую уравнением $y = x+1$, в точке, лежащей на оси ординат.

76. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3-x}{|x|}$.

77. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает график функции $y = |x^2-4x|$ в двух точках.

78. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2-3x|(x+1)}{x}$.

79. Построить график функции $f(x) = \dfrac{|x^2+2x|(x-1)}{x}$.

80. Построить график функции $g(x) = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определить:

а) при каких k прямая $y = kx$ имеет одну общую точку с графиком функции $g(x)$?

б) при каких b прямая $y = bx+2$ имеет одну общую точку с графиком функции $g(x)$?

81. Построить график функции $g(x) = \dfrac{x-2}{2x-x^2}$ и определить:

а) при каких k прямая $y = kx$ имеет одну общую точку с графиком функции $g(x)$?

б) при каких b прямая $y = bx+2$ имеет одну общую точку с графиком функции $g(x)$?

4.7 Прогрессии

Арифметическая прогрессия. Арифметической прогрессией называют последовательность чисел $\{a_n\}$, в которой каждое число, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему некоторого постоянного числа. Это постоянное число называется разностью арифметической прогрессии. Для того, чтобы решать задачи про арифметическую прогрессию, достаточно запомнить несколько формул:

1. $a_n = a_1 + (n-1)d,$
2. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$
3. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$
4. $S_n = na_1 + \dfrac{(n-1)n}{2} \cdot d.$

В этих формулах S_n обозначает сумму первых n членов прогрессии, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Как видно из этих формул, связанными оказываются a_1, n, d и a_n. Зная часть этих величин, можно выразить оставшиеся.

Геометрическая прогрессия. Геометрической прогрессией называют последовательность чисел $\{b_n\}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности, отличное от нуля, число. Это постоянное число называется знаменателем геометрической прогрессии. Аналогичные формулы для геометрической прогрессии:

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$
2. $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$
3. $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

Здесь S_n также обозначает сумму первых n членов и также связаны b_1, n, q и b_n.

Задачи. Во всех нижеприведённых задачах необходимо использовать одну из прогрессий, даже если это неочевидно с первого взгляда.

1. Туристы поднимаются на перевал высотой 4800 м. В первый день они поднялись на высоту 1800 метров, а в каждый последующий день набирали высоты на 200 м меньше, чем в предыдущий. Через сколько дней туристы достигнут перевала?

2. Сплавляясь по реке в первый день, геологи проплыли 40 км, а в каждый последующий день проплывали на 5 км меньше, чем в предыдущий. Сколько дней сплавлялись геологи, если длина реки равна 130 км?

3. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 165, которые при делении на 7 дают в остатке 5.

4. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 11 дают в остатке 3.

5. Найти сумму всех трёхзначных чисел, не кратных 5.

6. Найти сумму всех двузначных чисел, не кратных 3.

7. В геометрической прогрессии с положительными числами $b_3 = 32$; $b_7 = 2$. Найти b_5.

8. В геометрической прогрессии с положительными числами $b_2 = 16$; $b_{10} = 4$. Найти b_6.

9. При каких a числа a^2; $4a$; $2a + 5$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

10. При каких a числа a^2; $3a$; $a + 4$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

11. Третий член арифметической прогрессии равен 10, а восьмой равен 30. Сколько членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 242?

12. Третий член арифметической прогрессии равен 21, а девятый равен 51. Сколько членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 396?
13. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 7 и имеющих последней цифру 3.
14. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифру 5.
15. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член который равен 6, а четвёртый 24.
16. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член который равен 54, а пятый 6.
17. Сумма седьмого и тринадцатого членов арифметической прогрессии равна 16. Найдите её десятый член.
18. Сумма пятого и семнадцатого членов арифметической прогрессии равна 20. Найдите её одиннадцатый член.
19. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, шестой член которой равен $\frac{3}{4}$, а десятый $\frac{7}{4}$.
20. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, третий член которой равен (-1), а пятый 3.
21. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, первый член которой равен $1,2$, а четвёртый $1,8$.
22. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, второй член которой равен (-5), а разность шестого и четвёртого 6.
23. Бригада маляров красит забор длиной 240 м, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 м забора. Определите, сколько дней бригада красила весь забор.
24. Улитка ползёт от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний день улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями 150 метров.
25. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если первые два из них оставить без изменений, а из последнего вычесть первое, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если второе из взятых чисел равно 6.
26. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Если первые два числа оставить без изменения, а к третьему прибавить сумму двух первых, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.
27. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30; четвёртый, седьмой и пятый члены этой прогрессии в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что все её члены различны.
28. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130; четвёртый, десятый и седьмой члены этой прогрессии в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что все её члены различны.
29. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что: $a_5 + a_9 = 40$. Найдите $a_3 + a_7 + a_{11}$.
30. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что: $a_4 + a_6 = 38$. Найдите $a_2 + a_5 + a_8$.
31. Числа $a_1,\ a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечётными номерами на 15 больше суммы членов с чётными номерами. Найдите a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.
32. Числа $a_1,\ a_2, \ldots, a_{19}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что удвоенная сумма членов этой прогрессии с чётными номерами на 10 больше суммы всех членов. Найдите a_{13}, если $a_3 = 2a_4$.

33. Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого. Найдите сколько процентов первый член составляет от пятого.
34. Сумма первых трёх членов убывающей $(|q| < 1)$ геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов — 189. Найдите первый член и знаменатель данной прогрессии.
35. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?
36. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 11.
37. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7, но не кратных 5.
38. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 5, но не кратных 7.

4.8 Тригонометрия

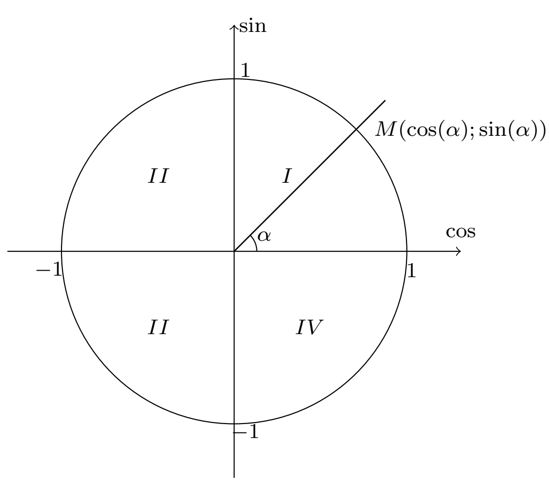
Формулы. Далеко не все программы и учебники предполагают изучение тригонометрии в 9 классе, поэтому задачи на использование тригонометрических формул (а не просто базовых сведений) последний раз встречаются во вступительных работах в 2012 году (в 2013 задача на соответствующую тему скорее просто геометрическая, а далее их нет вообще). Тем не менее, для полноты картины мы приведём и эти задачи, и формулы, которые позволяют их решить.

Если в 8 классе мы определяли тригонометрические функции только для острых углов, то теперь мы можем их определить и для всех остальных. Ниже приведём список основных формул для нахождения тригонометрических функции от углов, не содержащихся в таблице для 8 класса, а также для преобразования выражений.

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
3. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
4. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$.
6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
7. $\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$.
8. $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg(\alpha) \pm tg(\beta)}{1 \mp tg(\alpha)tg(\beta)}$.
9. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
10. $tg(180^\circ - \alpha) = -tg(\alpha)$.
11. $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
12. $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$.
13. $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$.
14. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$.
15. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
16. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.
17. $tg(2\alpha) = \dfrac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}$.

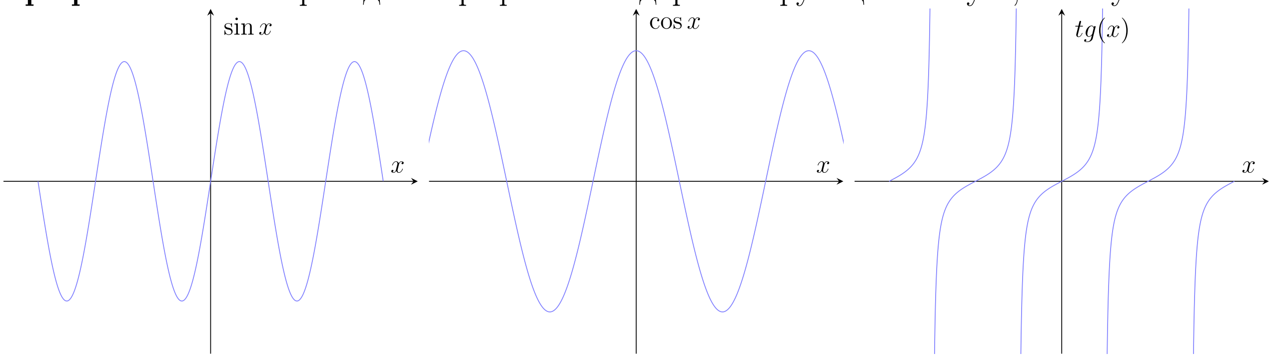
Заметим, что формул для котангенса мы не выписали, так как он всегда легко выражается через тангенс.

Тригонометрическая окружность. Синус и косинус любого угла можно определить как ординату и абсциссу точки, в которой сторона этого угла, отложенного от горизонтальной оси, пересекает единичную окружность. При этом необходимо понимать следующее соответствие: длина полного оборота по этой окружности равна 2π, а оборот при этом происходит на 360°, поэтому верно равенство $2\pi - 360^\circ$, поэтому $\pi = 180^\circ$. В первом случае говорят, что угол измеряется в радианах, а во втором — в градусах. При помощи этого равенства легко переводить углы из градусов в радианы и наоборот, например $135^\circ = 135^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{3\pi}{4}$.



На данной картинке изображён угол $\alpha = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$. Также на ней пронумерованы координатные четверти. По номеру координатной четверти можно узнать знаки синуса и косинуса угла, который ей принадлежит.

Графики. Ниже приведены графики стандартных функций: синуса, косинуса и тангенса.



Задачи. Все задачи так или иначе можно решить при помощи вышеприведённых формул и основного тригонометрического тождества.

1. Упростить $\dfrac{\cos(3\alpha)+\cos(4\alpha)+\cos(5\alpha)}{\sin(3\alpha)+\sin(4\alpha)+\sin(5\alpha)}$.
2. Упростить $\dfrac{\cos(6\alpha)+\cos(8\alpha)+\cos(10\alpha)}{\sin(6\alpha)+\sin(8\alpha)+\sin(10\alpha)}$.
3. Найти $\cos(\alpha)$, если $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{12}{13}$, а угол $\alpha - \dfrac{\pi}{4}$ находится в III четверти.
4. Найти $\sin(\alpha)$, если $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{5}{13}$, а угол $\alpha - \dfrac{\pi}{4}$ находится в II четверти.
5. Пусть $tg(2\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. найти все значения, которые может принимать $\sin(\alpha)+\cos(\alpha)$.
6. Пусть $ctg(2\alpha) = \sqrt{3}$. найти все значения, которые может принимать $\sin(\alpha)-\cos(\alpha)$.
7. Построить график функции $f(x) = -\sqrt{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} + \dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)}{\sqrt{2-2\cos(2x)}}$.
8. Построить график функции $f(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{2x}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)-2\cos(2x)+1}} + \left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
9. Упростить: $\dfrac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}$.
10. Упростить: $\dfrac{1+\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)+\cos(3\alpha)}{\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)}$.
11. Вычислить: $tg(41^\circ)\cdot tg(42^\circ)\cdot\ldots\cdot tg(48^\circ)\cdot tg(49^\circ)$.
12. Вычислить: $ctg(41^\circ)\cdot ctg(42^\circ)\cdot\ldots\cdot ctg(48^\circ)\cdot ctg(49^\circ)$.
13. Упростить: $\dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} + ctg(\alpha)$.
14. Упростить: $\dfrac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} + tg(\alpha)$.
15. Вычислите: $ctg(160^\circ)\cdot tg(20^\circ)\cdot ctg(135^\circ)$.

16. Вычислите: $ctg(140°) \cdot tg(40°) \cdot tg(135°)$.

17. Найдите $tg(\alpha)$, если $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$, $90° < \alpha < 180°$.

18. Найдите $ctg(\alpha)$, если $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$, $90° < \alpha < 180°$.

19. Вычислите $\cos(\alpha)$, если $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$, а $\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ — угол III четверти.

20. Вычислите $\sin(\alpha)$, если $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5}{13}$, а $\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ — угол I четверти.

21. Дано: $\sin(\alpha) = 0,28$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin(2\alpha)$.

22. Дано: $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Найдите $\sin(2\alpha)$.

23. Дано: $\sin(\alpha) = -0,28$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin(2\alpha)$.

24. Дано: $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin(2\alpha)$.

25. Дано: $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\cos(2\alpha)$.

26. Дано: $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin(2\alpha)$.

27. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin(A) = \frac{7}{25}$. Найдите $\cos(A)$.

28. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin(A) = \frac{24}{25}$. Найдите $\sin(B)$.

4.9 Стандартные задачи

К стандартным задачам будут отнесены задачи на все те темы, которые уже встречались в 7-8 классах.

Задачи. О методах решения задач можно прочитать в разделах для 7-8 класса.
1. Найдите число N, если 6 составляет 40% от $N+5$.
2. Найдите число N, если 9 составляет 75% от $N+3$.
3. При каких натуральных n значение данного выражения является целым числом: $\dfrac{2n^2+5n-5}{n+1}$?
4. При каких натуральных n значение данного выражения является целым числом: $\dfrac{3n^2+4n-3}{n+3}$?
5. Сплавлено 40 г золота одной пробы и 60 г золота другой пробы и получено золото 62-й пробы. Какой пробы было золото первого и второго слитков, если при сплаве их поровну получается золото 61-й пробы?
6. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля в 30%?
7. Бассейн заполняется водой, поступающей через две трубы. Одна труба может заполнить бассейн за 12 часов, а другая — за 20 часов. За сколько часов заполнится бассейн двумя трубами, работающими одновременно?
8. Вода, поступающая в первую трубу, может наполнить бассейн за 6 часов, а вода, вытекающая из второй трубы, может опорожнить его за 15 часов. За сколько часов наполнится бассейн, если обе трубы будут одновременно открыты?
9. Из A и B выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
10. Из A и B выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 57 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
11. Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 часов. Если сначала один первый печник будет работать 2 часа, а затем один второй — 3 часа, то они выполнят только 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь один первый печник?
12. Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если сначала первая бригада будет работать 3 дня, а затем одна вторая — 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая одна вторая бригада?
13. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.
14. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.
15. Имеется 10 литров 60-процентного раствора соли. Сколько литров воды надо долить, чтобы получить 40-процентный раствор соли?
16. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили

7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

17. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

18. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

19. Игорь и Паша могут покрасить забор за 3 часа. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 6 часов, Володя и Игорь — за 4 часа. За какое время мальчики покрасят забор, работая вместе?

20. Маша и Настя могут вымыть окно за 20 минут. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 минут, а Маша и Лена — за 12 минут. За какое время девочки вымоют окно, работая втроём?

21. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 20 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 60 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

22. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

23. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность быть равной 189?

24. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность быть равной 180?

25. При каких натуральных n значение выражения $\dfrac{n^2+5n-8}{n+3}$ является целым числом?

26. При каких натуральных n значение выражения $\dfrac{-n^2+2n-31}{n+3}$ является целым числом?

27. Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый в час делает на 3 детали больше?

28. Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый в час делает на 1 деталь больше?

29. В январе товар стоил 30000 рублей. В марте цену на товар подняли на 4%, а в июле снизили на 4%. Сколько стоил товар в июле?

30. В феврале товар стоил 20000 рублей. В мае цену подняли на 6%, а в августе снизили на 6%. Сколько стоил товар в августе?

31. Расстояние между пристанями A и B равно 18 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 30 мин за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в пункт A. К этому времени плот прошёл 9 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 50 м/мин.

32. Расстояние между пристанями A и B равно 14 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 44 мин за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в пункт A. К этому времени плот прошёл 7 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 50 м/мин.

33. Один раствор содержит 20% (по объёму) соляной кислоты, а второй содержит 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-го раствора соляной кислоты?

34. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 15 кг, содержащий 40% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 30% меди?

35. В каждом из двух ящиков лежит 15 шаров. Число синих шаров в обоих ящиках равно 8, остальные шары — красные. Сколько красных шаров лежит в каждом ящике, если в первом ящике на каждый синий шар приходится в 2 раза меньше красных шаров, чем во втором?

36. В каждом из двух ящиков лежит 40 кубиков. Число жёлтых кубиков в обоих ящиках равно 14, остальные кубики — зелёные. Сколько зелёных кубиков лежит в каждом ящике, если в первом ящике на каждый жёлтый кубик приходится в 3 раза меньше зелёных кубиков, чем во втором?

37. На финальной распродаже скидка на все товары составляет 50%, при этом по карте магазина

постоянным покупателям предоставляется дополнительная скидка 30%. При каком последовательном использовании скидок итоговая скидка больше и сколько она составит в каждом случае?

38. На финальной распродаже скидка на все товары составляет 70%, при этом по карте магазина постоянным покупателям предоставляется дополнительная скидка 20%. При каком последовательном использовании скидок итоговая скидка больше и сколько она составит в каждом случае?

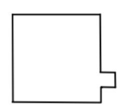
39. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 593$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Допплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в м/с. Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 7 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

40. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 154$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Допплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в м/с. Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 6 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 320$ м/с. Ответ выразите в м/с.

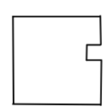
41. Из Вены в Стамбул отправился пассажирский поезд, а навстречу ему из Стамбула в Вену через 3 часа вышел товарный поезд. После встречи пассажирский поезд ехал еще 3 часа до Стамбула, а товарный — 6 часов до Вены. Сколько часов был в пути каждый из поездов?

42. Из пункта А в пункт Б отправился велосипедист Вася, а через 2 минуты ему навстречу из Б в А выехал велосипедист Петя. От места встречи на дороге Вася добрался до пункта Б за 11 минут, а Петя до пункта А за 9 минут. Сколько минут был в пути каждый из них?

43. К краю большого квадратного листа приложили маленький квадратик, как показано на рисунке, и в результате периметр листа увеличился на 5%. На сколько $\%$ увеличилась площадь листа?



44. От края большого квадратного листа отрезали маленький квадратик, как показано на рисунке, и в результате периметр листа увеличился на 10%. На сколько $\%$ уменьшилась площадь листа?



4.10 Нестандартные задачи

В этом разделе будут собраны задачи, к которым неприменимы разобранные ранее приёмы.

Задачи. Советы к этим задачам остаются прежними: грамотно составлять уравнения и повторить теорию чисел.

1. *Логарифмом* числа $a>0$ по основанию 2 называется показатель степени, в которую нужно возвести 2, чтобы получить a. Обозначение: $\log_2 a$.
Вычислить: а) $\log_2 8$; б) $2^{\log_2 3}$; в) $4^{\log_2 5}$; г) Подумайте о том, что означает символ $\log_5 a$ и вычислите $2^{\log_5 3\cdot\log_2 5}$.

2. *Логарифмом* числа $a>0$ по основанию 3 называется показатель степени, в которую нужно возвести 3, чтобы получить a. Обозначение: $\log_3 a$.
Вычислить: а) $\log_3 27$; б) $3^{\log_3 2}$; в) $9^{\log_3 7}$; г) Подумайте о том, что означает символ $\log_5 a$ и вычислите $3^{\log_5 3\cdot\log_3 5}$.

3. Тринадцать различных натуральных чисел в сумме дают 92. Найдите эти числа.

4. Одиннадцать различных натуральных чисел в сумме дают 67. Найдите эти числа.

5. Три ученика Саша, Дима и Лёша прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта бессмысленная идея, они ответили следующее:
Саша: Это не я, это была идея Димы.
Дима: Это не я, во всём виноват Лёша.
Лёша: Это не я, это Дима.
Учитель почувствовал, что среди шести утверждений только половина правда. Кто из учеников оказался инициатором прогула?

6. Три ученика Саша, Дима и Лёша прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта бессмысленная идея, они ответили следующее:
Саша: Это не я, это была идея Димы.
Дима: Это не я, во всём виноват Лёша.
Лёша: Это не я, это Дима.
Учитель почувствовал, что двое учеников говорят правду только наполовину, а один лжёт. Кто из учеников оказался инициатором прогула?

7. Операция $*$ каждым двум числам x, y ставит в соответствие число, обозначаемое $x*y$. При этом для всех чисел x, y, z выполняется: а) $x*x=0$; б) $(x+y)*z=x+(y*z)$. Найти $6*14$.

8. Операция $*$ каждым двум числам x, y ставит в соответствие число, обозначаемое $x*y$. При этом для всех чисел x, y, z выполняется: а) $x*x=0$; б) $(x+y)*z=x+(y*z)$. Найти $8*12$.

9. Найдите наименьшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 22.

10. Найдите наименьшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 23.

11. Сколько нулей стоит в конце числа 100! ($n!$ — произведение натуральных чисел от 1 до n)?

12. Сколько нулей стоит в конце числа 101! ($n!$ — произведение натуральных чисел от 1 до n)?

13. Не возводя в куб, сравните: $0,123^3+0,124^3+0,125^3$ и 0,002856.

14. Не возводя в куб, сравните: $0,131^3+0,132^3+0,133^3$ и 0,002976.

15. Даны две параллельные прямые, на одной из которых отмечено 6 точек, а на другой 3 точки. Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

16. Даны две параллельные прямые, на одной из которых отмечено 5 точек, а на другой 4 точки. Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

17. Дано $(a+1)(b+1)=2ab$. Найдите числовое значение выражения $\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}$.

18. Дано $(a-1)(b-1)=2ab$. Найдите числовое значение выражения $\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}$.

19. При каком наименьшем натуральном значении n все дроби $\dfrac{7}{n+9}, \dfrac{8}{n+10}, \ldots, \dfrac{31}{n+33}$ одновременно несократимы?

20. При каком наименьшем натуральном значении n все дроби $\frac{6}{n+8}$, $\frac{7}{n+9}$, $\ldots$, $\frac{29}{n+31}$ одновременно несократимы?
21. Про функцию f известно, что $f(a;b;c)+f(d;b;c)=f(a+d;b;c)+2bc$. Кроме того, $f(a;b;c)=f(b;a;c)=f(c;b;a)$ и $f(1;3;5)=46$. Найдите: а) $f(3;2;5)$; б) $f(2;6;10)$.
22. Про функцию f известно, что $f(a;b;c)+f(d;b;c)=f(a+d;b;c)+2bc$. Кроме того, $f(a;b;c)=f(b;a;c)=f(c;b;a)$ и $f(2;3;5)=62$. Найдите: а) $f(3;4;5)$; б) $f(4;6;10)$.
23. Выясните, является ли простым число $2^{10}+5^{12}$.
24. Пятнадцать различных натуральных чисел дают в сумме 121. Найдите эти числа.
25. Для каких натуральных n число $\sqrt{50-n^2}$ будет целым?
26. Для каких натуральных n число $\sqrt{52-n^2}$ будет целым?
27. а) Сколько различных чётных пятизначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, используя каждую цифру только один раз?
б) Какой будет результат, если цифры могут повторяться?
28. а) Сколько различных пятизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, используя каждую цифру только один раз?
б) Какой будет результат, если цифры могут повторяться?

4.11 Геометрия

Вектора. Помимо правила сложения векторов теперь необходимо знать ещё и связь вектора с координатами.

1. Если у точки A координаты $(x_1; y_1)$, а у точки B — $(x_2; y_2)$, то у вектора $\overrightarrow{AB}$ координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.
2. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x; y)$, то его длина выражается по формуле $l = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. **Скалярное произведение** векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ может быть найдено по следующей формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$. С другой стороны, оно же может быть вычислено по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Это позволяет выразить косинус угла между векторами через координаты: $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. Здесь следует обратить внимание на то, что в угол между векторами не всегда равен углу между содержащими их прямыми: угол между прямыми не может быть тупым по определению (из двух образующихся углов углом между прямыми считается острый или прямой), тогда как угол между векторами таким быть может (и, соответственно, иметь отрицательный косинус).

С помощью этой формулы легко установить перпендикулярность векторов: угол между ними равен 90° тогда и только тогда, когда его косинус, а значит и скалярное произведение, равны нулю.

Теоремы синусов и косинусов. Теорема синусов позволяет по трём элементам треугольника найти все остальные и радиус его описанной окружности.

Теорема синусов. Для любого треугольника верны равенства

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R,$$

где углы α, β и γ лежат напротив сторон a, b и c соответственно, а R — радиус его описанной окружности.

Теорема косинусов. Для любого треугольника верны равенства

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha),\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta),\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma),$$

где углы α, β и γ лежат напротив сторон a, b и c соответственно.

Из теоремы косинусов выводится формула для медианы треугольника: $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$, где m_a — медиана, проведённая к стороне a.

Круг и окружность. Необходимо знать несколько формул, связанных с окружностью и кругом.

1. Длина окружности: $l = 2\pi r$.
2. Площадь круга: $S = \pi r^2$.
3. Площадь сектора: $S = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$.
4. Площадь сегмента: $S = \dfrac{1}{2}(\alpha - \sin(\alpha))r^2$.

Задачи. В большом количестве задач необходимо применять теоремы синусов и косинусов, чтобы найти неизвестные элементы треугольника.

1. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$). Пусть O — точка пересечения диагоналей этой трапеции. Известно, что $\dfrac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = 16$. Найти $\dfrac{BC}{AD}$.
2. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$). Пусть O — точка пересечения диагоналей

этой трапеции. Известно, что $\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOD}} = \dfrac{1}{81}$. Найти $\dfrac{AD}{BC}$.
3. В окружность радиуса R вписан треугольник, одна сторона которого равна R, а другая — $R\sqrt{3}$. Найти площадь этого треугольника.
4. В окружность радиуса R вписан треугольник, одна сторона которого равна $\dfrac{3}{2}R$, а другая — $\dfrac{R\sqrt{7}}{2}$. Найти площадь этого треугольника.
5. Точка M, расположенная вне окружности, соединена с концами диаметра AB. Прямая MA пересекает окружность в точке E, $AE = 3$, $ME = 2$, радиус окружности равен 2,5. Найдите площадь треугольника AMB.
6. Из точки M, расположенной вне окружности, проведена касательная MA к этой окружности (A — точка касания). Пусть AC — диаметр окружности, MC пересекает окружность в точке E, $MA = 5$, радиус окружности равен 6. Найти AE.
7. В треугольнике $ABC : p(p-a) = \dfrac{3}{4}bc$ (a, b, c — стороны, $p = \frac{a+b+c}{2}$). Найти угол треугольника при вершине A.
8. В треугольнике $ABC : S = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$ (a, b, c — стороны, S — площадь). Найти угол треугольника при вершине A.
9. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $AK = KC = 3$, а на стороне BC взята точка L так, что $BL = 1$, $LC = 2$. Найти отношение площадей частей, на которые треугольник ABC делится отрезком KL.
10. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка S так, что $AS = SC = 6$, а на стороне AB взята точка T так, что $AT = 2$, $TB = 4$. Найти отношение площадей частей, на которые треугольник ABC делится отрезком ST.
11. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр CD в точке K. Расстояние от O до AB равно 4, $AB = 16$. Найти OC.
12. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр CD в точке K. Расстояние от O до AB равно 4, $OC = 10$. Найти AB.
13. В равнобедренную трапецию с основаниями 2 и 8 вписана окружность. Другая окружность касается большего основания, боковой стороны и данной окружности. Найти радиус этой окружности.
14. В равнобедренную трапецию с боковой стороной 10 вписана окружность радиуса 4. Другая окружность касается большего основания, боковой стороны и данной окружности. Найти радиус этой окружности.
15. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6, а боковая сторона — 5. Найти расстояние между точками пересечения медиан и высот треугольника ABC.
16. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6, а боковая сторона — 5. Найти расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис треугольника ABC.
17. Пусть $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$), $S_{\Delta BOC} = a^2$, $S_{\Delta AOD} = b^2$. Найти площадь трапеции.
18. По одну сторону от прямой AC отложены отрезки AB и CD ($AB \parallel CD$), F — точка пересечения BC и AD, $FE \parallel AB$, где E — точка на AC. Доказать, что $\dfrac{1}{EF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}$.
19. На катетах прямоугольного треугольника площади 1 как на диаметрах построены полукруги, расположенные вне этого треугольника. Найти сумму площадей этих полукругов, расположенных вне круга, описанного около исходного треугольника.
20. Даны две концентрические окружности. Проведена хорда большей окружности, касающаяся меньшей. На ней, как на диаметре, построена третья окружность. Доказать, что площадь третьего круга равна площади кольца между двумя первыми окружностями.
21. Найти площадь трапеции с основаниями 16 см и 44 см и боковыми сторонами 17 см и 25 см.
22. Найти площадь трапеции с основаниями 6 см и 7 см и боковыми сторонами 5 см и 12 см.
23. Основания трапеции 4 см и 16 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей этой

трапеции, если известно, что эти окружности существуют.
24. Основания трапеции 2 см и 14 см. Радиус вписанной окружности равен 4 см. Найти радиус описанной окружности этой трапеции, если известно, что эта окружность существует.
25. В треугольнике $ABC : AC = \sqrt{2},\ \angle A = 75^\circ,\ \angle C = 60^\circ.$ Найти AB.
26. В треугольнике $ABC : AB = \sqrt{3},\ \angle A = 75^\circ,\ \angle B = 45^\circ.$ Найти AC.
27. При каких x векторы $\vec{a} = (4;5)$ и $\vec{b} = (x;-6)$ будут перпендикулярны?
28. При каких x векторы $\vec{a} = (5;4)$ и $\vec{b} = (x;-3)$ будут перпендикулярны?
29. Найти диагональ и площадь ромба, если его стороны равны 10 см, а другая диагональ равна 12 см.
30. Найти диагональ и площадь ромба, если его стороны равны 5 см, а другая диагональ равна 6 см.
31. Касательная к окружности из некоторой точки равна 20 см, а наибольшая секущая, проведённая из той же точки, равна 50 см. Найдите радиус окружности.
32. Касательная к окружности из некоторой точки равна 12 см, а наибольшая секущая, проведённая из той же точки, равна 36 см. Найдите радиус окружности.
33. При каких значениях t векторы $\vec{a} = (1;t)$ и $\vec{b} = (t+2;-t)$ имеют равные длины?
34. При каких значениях t векторы $\vec{a} = (1;-t)$ и $\vec{b} = (2-t;t)$ имеют равные длины?
35. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к стороне как $4:3$. Найдите радиус вписанного круга.
36. В равнобедренном треугольнике высота равна 10, а основание относится к стороне как $3:4$. Найдите радиус вписанного круга.
37. Диагонали ромба равны 14 и 48 см. Найдите высоту ромба.
38. Диагонали ромба равны 24 и 10 см. Найдите высоту ромба.
39. Сумма внешних углов многоугольника равна сумме его внутренних углов. Найдите число сторон этого многоугольника.
40. Сумма внешних углов многоугольника в 3 раза меньше суммы его внутренних углов. Найдите число сторон этого многоугольника.
41. Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой её острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7,5 см и 12,5 см. Вычислите длины сторон трапеции.
42. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 18 см. Вычислите длину её средней линии.
43. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 20 см, а угол при вершине 40°.
44. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 10 см и углом при основании 30°.
45. В равнобедренном треугольнике $\cos$ угла при вершине равен $\frac{7}{9}$. Найти $\sin$ и $\cos$ угла при основании.
46. В равнобедренном треугольнике $\cos$ угла при вершине равен $\frac{5}{9}$. Найти $\sin$ и $\cos$ угла при основании.
47. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении $12:5$, а боковая сторона равна 60 см. Определить основание.
48. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 см. Определите его стороны.
49. Дан ΔABC. Угол B равен 90°, точка M лежит на стороне AC. Угол MBC равен 30°, $|MC| = 2$ см, $|AB| = 2$ см. Найдите $|BC|$.
50. Дан ΔABC. Угол B равен 90°, точка M лежит на стороне AC. Угол MBC равен 30°, $|MC| = 3$ см, $|AB| = 3$ см. Найдите $|BC|$.
51. В окружность радиуса $\sqrt{12}$ вписан квадрат. На диагонали квадрата, как на основании, построен равносторонний треугольник, вокруг которого описана окружность. Найти радиус этой окружности.

52. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан равносторонний треугольник. На его высоте, как на основании, построен правильный треугольник, в который вписана окружность. Найти радиус этой окружности.
53. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На стороне BC взята точка N так, что $CN = 2BN$. В каком отношении AN и BM делят друг друга?
54. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $AD = 2BC$. На стороне CD взята точка M так, что $DM = 2CM$. В каком отношении отрезок AM и диагональ BD делят друг друга?
55. Существует ли треугольник, две высоты которого больше 1м, а площадь меньше 1см^2? Не забудьте обосновать ответ.
56. Существует ли треугольник, все стороны которого больше 1м, а площадь меньше 1см^2? Не забудьте обосновать ответ.
57. Даны два утверждения:
а) Если все стороны вписанного многоугольника равны, то и все его углы равны.
б) Если все углы вписанного многоугольника равны, то и все его стороны равны.
Какое из этих утверждений верно, а какое нет? (Подсказка: рассмотрите четырёхугольники и пятиугольники).
58. Даны два утверждения:
а) Если все стороны описанного многоугольника равны, то и все его углы равны.
б) Если все углы описанного многоугольника равны, то и все его стороны равны.
Какое из этих утверждений верно, а какое нет? (Подсказка: рассмотрите четырёхугольники и пятиугольники).
59. Найти радиусы вписанной и описанной окружности для равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона равна 13, а высота, проведённая к основанию, равна 5.
60. Радиус окружности, описанной вокруг тупоугольного равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равен 2. Центр O окружности удалён от AC на 1. Найти площадь треугольника ABC и радиус окружности, вписанной в треугольник.
61. Диагонали трапеции перпендикулярны. Высота трапеции равна 4, одна из диагоналей равна 5. Найти площадь трапеции.
62. Диагонали трапеции перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 6,5 а одна из диагоналей равна 5. Найти площадь трапеции.
63. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите KM, если $BK : KA = 2 : 5$, $AC = 21\,\text{см}$.
64. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если $BK : KA = 3 : 4$, $KM = 18\,\text{см}$.
65. Найдите длину медианы BM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(2;5)$, $B(0;0)$, $C(4;3)$.
66. Найдите длину медианы BM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(-3;-2)$, $B(-6;2)$, $C(0;0)$.
67. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24\,\text{см}$, $BF = 10\,\text{см}$.
68. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24\,\text{см}$, $BF = 18\,\text{см}$.
69. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см. Найдите площадь треугольника.
70. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 10 см, а основание треугольника равно 12 см. Найдите площадь треугольника.
71. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A, AD — высота треугольника, AM — биссектриса. Найдите AD, если $MB = 3$, $MC = 1$.
72. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A, AD — высота треугольника, AM — биссектриса. Найдите AD, если $MB = 2$, $MC = 4$.

73. Найдите сумму квадратов сторон равнобедренного треугольника с углом при вершине $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ и стороной основания $a = 1$.

74. Найдите сумму квадратов сторон равнобедренного треугольника с углом при вершине $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ и стороной основания $a = 1$.

75. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, последовательные стороны которой равны 2 см, 1 см, 1 см, 1 см.

76. В треугольнике $ABC : \cos C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$. Найдите высоту AH этого треугольника.

77. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC сторона AB равна 8, а $\cos A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту треугольника ABC, проведённую к основанию.

78. Найдите длину медианы BM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(1;4)$, $B(0;0)$, $C(4;1)$.

79. Найдите длину медианы BM треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника: $A(3;2)$, $B(2;3)$, $C(0;0)$.

80. Острый угол прямоугольного треугольника равен $24°$. найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

81. Острый угол прямоугольного треугольника равен $53°$. найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

82. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 20, $AD = 25$. Найдите синус угла B.

83. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 14, $AD = 28$. Найдите синус угла B.

84. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $OB = OD$, $AO < OC$. Докажите, что $\angle BAO > \angle BCD$.

85. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $\angle A = 60°$, $\angle D = 30°$, $AD = a$, $BC = b$. Найдите:
а) площадь трапеции $ABCD$,
б) длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.

86. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

87. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен $60°$, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

88. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $30°$. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

89. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

90. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8;0)$, $(0;6)$, $(8;6)$.

91. Найдите ординату центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8;0)$, $(0;6)$, $(8;6)$.

92. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны равны 3, 4 и 5.

93. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны равны 12, 15 и 21.

94. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите r, если $AB = 12$, $R = 8$.

95. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается изнутри третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус R, если $AB = 11$, $r = 5$.

96. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, $AC = 2\sqrt{2}$. Найдите длину медианы AM.

97. В параллелограмме $ABCD$ дано: $AD = 2$, угол BAD равен 60°, $BE \perp AD$, $BE = 2\sqrt{3}$. Найдите длину большей диагонали параллелограмма.
98. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно $\frac{4}{3}R$.
99. Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями a и b. найдите диагональ трапеции.
100. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на треугольники, площади которых равны 6см^2 и 54см^2. Найдите гипотенузу треугольника.
101. В треугольнике ABC известно, что $AB : AC = 3 : 5$, AD — биссектриса угла. Площадь треугольника ABD равна 9см^2. Найдите площадь треугольника ACD.
102. Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 25 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C, если $AC = 7\,\text{см}$.
103. Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 24 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины B, если $AB = 3\,\text{см}$.
104. Точки $A(1;2)$, $B(5;3)$ и $D(1;18)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.
105. Точки $A(3;2)$, $B(4;7)$ и $C(16;7)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.
106. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. Найдите стороны трапеции, если её большее основание равно $4R$.
107. В треугольнике ABC на стороне BC взяли точку M так, что $BM : MC = 5 : 4$. Вычислите длину отрезка AM, если $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$.
108. В треугольнике ABC на стороне BC взяли точку M так, что $BM : MC = 4 : 5$. Вычислите длину отрезка AM, если $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$.
109. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ $AB = 25$, $AC = 14$.
а) Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины C.
б) Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.
в) Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.
г) В треугольник вписан прямоугольник $KLMN$ $(KL = 2LM)$ так, что точки K и L лежат на стороне AC, а точки M и N — на сторонах BC и AB соответственно. Найдите длину KL.
110. В равнобедренном треугольнике ABC выполнено $AB = BC = 13$, $AC = 10$.
а) Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины C.
б) Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.
в) Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.
г) В треугольник вписан прямоугольник $KLMN$ $(KL = 2LM)$ так, что точки K и L лежат на стороне AC, а точки M и N — на сторонах BC и AB соответственно. Найдите длину KL.
111. В трапеции $ABCD$ стороны оснований $AD = 10$, $BC = 4$. Боковые стороны $AB = 4$, $CD = 6$. Найдите высоту трапеции.
112. В трапеции $ABCD$ стороны оснований $AD = 9$, $BC = 5$. Боковые стороны $AB = 4$, $CD = 5$. Найдите высоту трапеции.
113. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите радиус этой окружности, если основания трапеции равны 4 и 9.
114. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите радиус этой окружности, если основания трапеции равны 49 и 16.
115. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе и радиус вписанной в треугольник окружности.
116. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 30 см и 50 см. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе и радиус вписанной в треугольник окружности.
117. В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = \sqrt{14}$ см. Найдите а) длину медианы CM

б) площадь треугольника ABC.
118. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = \sqrt{13}$ см, $AC = 3$ см. Найдите а) длину медианы CM б) площадь треугольника ABC.
119. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 3 см и 4 см, а средняя линия равна 2,5 см.
120. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 6 см и 8 см, а средняя линия равна 5 см.
121. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 12$ см.
122. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13 см, $BC = 24$ см. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B, биссектриса угла A делит высоту, проведённую из этой вершины.
123. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются под прямым углом. Найдите длину медианы треугольника, проведённой из вершины A, если $BC = 42$ см.
124. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются под прямым углом. Найдите BC, если длина медианы треугольника, проведённой из вершины A, равна 36 см.
125. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите площадь этой трапеции, если её основания равны 1 и 25.
126. Точка M является серединой боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника MCD равна 28 см^2.
127. Точка M является серединой боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника MCD, если площадь трапеции равна 26 см^2.
128. Найдите косинус угла D выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если косинус угла B равен $\frac{5}{6}$, $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 8$.
129. Найдите косинус угла C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если косинус угла A равен $-\frac{2}{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 7$, $AD = 6$.
130. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $56°$, $57°$, $67°$.
131. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $46°$, $58°$, $76°$.
132. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Найдите величину угла при вершине A четырёхугольника, если углы DBC и CDB равны соответственно $53°$ и $64°$.
133. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DBC и DAC равны. Найдите величину угла при вершине D четырёхугольника, если углы BAC и BCA равны соответственно $42°$ и $37°$.
134. В треугольнике $ABC : \angle A = 24°$, $\angle B = 80°$. Найдите угол между прямой, содержащей высоту треугольника, проведённой из вершины B и прямой, содержащей биссектрису внешнего угла при вершине C.
135. В треугольнике $ABC : \angle A = 26°$, $\angle B = 70°$. Найдите угол между прямой, содержащей высоту треугольника, проведённой из вершины B и прямой, содержащей биссектрису внешнего угла при вершине C.
136. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 44 и 16. Боковая сторона AB равна 17, а CD равна 25. Найдите площадь трапеции.
137. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 41 и 13. Боковая сторона AB равна 17, а CD равна 25. Найдите площадь трапеции.
138. В треугольнике ABC стороны $AB = 6$, $BC = 3$, $AC = 5$. на стороне AC взята точка M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{3}{2}$. Найдите отрезок BM.
139. В треугольнике ABC стороны $AB = 6$, $BC = 3$, $AC = 5$. на стороне AB взята точка M так,

что $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{5}$. Найдите отрезок CM.

140. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

141. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найдите катеты треугольника.

142. В треугольнике $ABC : \cos\angle C = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $AC = BC = 3\sqrt{7}$. Найдите высоту AH этого треугольника.

143. В треугольнике $ABC : \cos\angle C = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $AC = BC = 8$. Найдите высоту BH этого треугольника.

144. По стене крепости, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 400 м, ходят часовые, которые вооружены луками с дальностью стрельбы 100 м. Какова площадь «простреиваемой» территории

а) снаружи крепости,

б) внутри крепости?

145. В ΔABC проведены медианы AM и CN. O — их точка пересечения. Какую часть площади ΔABC составляет площадь четырёхугольника $NBMO$?

146. В ΔABC проведена медиана BN и средняя линия KM. O — их точка пересечения. Какую часть площади ΔABC составляет площадь ΔOMN?

147. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник с прямыми углами B и $D, \angle A = 45°, BC = 4, CD = 3\sqrt{2}$. Найти AC.

148. $MKNP$ — выпуклый четырёхугольник с прямыми углами $M, N; \angle P = 120°, KM = 4, KN = 6$. Найти PK.

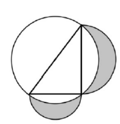
149. Прямая делит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{8}$ на две части. Найдите наибольшее произведение площадей этих частей.

150. Прямая делит ромб с диагоналями 2 и 4 на две части. Найдите наибольшее произведение площадей этих частей.

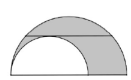
151. $ABCD$ — прямоугольник. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BM и DN, причём $MN = 15$, а $BM = DN = 4$. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

152. $ABCD$ — прямоугольник. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BK и DM, причём $BK = DM = 6$, а $KM = 5$. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

153. На катетах прямоугольного треугольника площадью 12 как на диаметрах построены полукруги, расположенные вне этого треугольника. Найдите суммарную площадь частей этих полукругов, расположенных вне круга, описанного около этого треугольника.



154. Даны два полукруга, с диаметрами на одной прямой. Хорда большего полукруга AB длиной 12 параллельна диаметру и касается меньшего полукруга. Найдите площадь закрашенной фигуры.



155. В трапеции $ABCD$ нижнее основание AD в три раза больше верхнего. Точка M лежит на боковой стороне CD, причём $CM : MD = 1 : 3$. Отрезок AM пересекает диагональ BD в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит каждый из этих отрезков.

156. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N, такая, что $BN : NC = 3 : 2$. Отрезок AN и медиана BM пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит каждый из этих отрезков.

157. Прямая, проведенная через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает сторону AD в точке T, а продолжение стороны CD в точке M, и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Сторона квадрата равна 8. Найдите площадь треугольника BMT.

158. Прямая, проведенная через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно (так, что T лежит на продолжении DA за точку A), и образует с прямой AD угол, тангенс которого равен 2. Сторона квадрата равна 6. Найдите площадь треугольника BMT.

159. Внутри угла величиной 45° расположена точка N, удалённая на расстояния $2\sqrt{2}$ и 2 см от сторон угла. Найдите расстояние от точки N до вершины угла.

160. Внутри угла величиной 60° расположена точка M, удалённая на расстояния $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найдите расстояние от точки M до вершины угла.

Список литературы

[1] А.В. Шевкин Текстовые задачи по математике 5—6. // Просвещение. — 2013.

[2] С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин Алгебра 7 класс. // Просвещение. — 2013.

[3] Ю. Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов Алгебра 7 класс. // Мнемозина. — 2013.

[4] Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина Геометрия 7—9 классы. // Просвещение. — 2010.

[5] С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин Алгебра 8 класс. // Просвещение. — 2013.

[6] А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская Алгебра 8 класс. // Мнемозина. — 2003.

[7] М.Л. Галицкий, А.М. Гольдан, Л.И. Звавич Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8—9 кл. с углубл. изучением математики. // Просвещение. — 2001.

[8] Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло, Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, А.И. Кудрявцев Алгебра 8 класс. // Просвещение. — 2010.

[9] С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин Алгебра 9 класс. // Просвещение. — 2014.

[10] Н.Я. Виленкин Алгебра 9 класс. Учебник для учащихся 9 класса с углублённым изучением математики. // Просвещение. — 2006.

[11] А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов Алгебра 9 класс. // Мнемозина. — 2010.